أكاديمية الجهة الشرقية

تصحيح تمارين للبحث تحضيرا للواجب3

المستوى : الجذع مشترك علمي

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1:

1) $\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9}=0$ هناك مرحلتين لحل مثل هذه المعادلات

المرحلة1:نحدد أولا مجموعة تعريف المعادلة

المعادلة لها معنى يعني $x^2-9\neq 0$

$x^2-9=0$ يعني $x^2-3^2=0$ يعني $(x-3)(x+3)=0$

يعني $x+3=0$ أو $x-3=0$ يعني $x=-3$ أو $x=3$

ومنه: $D_E=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

المرحلة2: الحل الفعلي للمعادلة : $\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9}=0$

يعني $(x-7)(x+3)=0$ يعني $x-7=0$ أو $x+3=0$

يعني $x=7\in D_E$ أو $x=-3\notin D_E$ ومنه : $S=\{7\}$

2) $(5x-7)^2-(5x-7)(2x+3)=0$

يعني $(5x-7)\left[(5x-7)-(2x+3)\right]=0$

يعني $(5x-7)(3x-10)=0$ يعني $5x-7=0$ أو $3x-10=0$

يعني $x=\frac{7}{5}$ أو $x=\frac{10}{3}$ ومنه: $S=\left\{\frac{7}{5},\frac{10}{3}\right\}$

3) $(1-x)(2x+4)>0$

$(1-x)(2x+4)=0$ يعني $2x+4=0$ أو $1-x=0$ يعني

$x=-2$ أو $x=1$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(1-x)(2x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

و منه فان : $S=]-2;1[$

4) $\frac{5x-2}{1+3x}\geq 0$ المرحلة1:نحدد أولا مجموعة تعريف المتراجحة

المتراجحة لها معنى يعني $1+3x\neq 0$ يعني $x\neq -\frac{1}{3}$

ومنه: $D_I=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

المرحلة2: الحل الفعلي للمتراجحة

$5x-2=0$ يعني $x=\frac{2}{5}$ و $1+3x=0$ يعني $x=-\frac{1}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$1+3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$5x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{5x-2}{1+3x}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

و منه فان : $S=\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup\left[\frac{2}{5};+\infty\right[$

5) $\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6}\leq 0$

المرحلة1:نحدد أولا مجموعة تعريف المتراجحة

المتراجحة لها معنى يعني $2x-6\neq 0$ يعني $x\neq 3$ ومنه:

$D_I=\mathbb{R}-\{3\}$

المرحلة2: الحل الفعلي للمتراجحة : $5x-10=0$ يعني $x=2$

$2x+1=0$ يعني $x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		3		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$5x-10$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-6$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6}$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

و منه فان : $S=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup[2;3[$

تمرين 3: عمل ثلاثيات الحدود التالية :

1) $x^2-10x+25$ 2) x^2-3x+2 3) $3x^2+x+2$

أجوبة : 1) $x^2-10x+25$: $a=1$ و $b=-10$ و $c=25$

$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4\times1\times(25)=100-100=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد **هو:**

$x_1=\frac{-(-10)}{2\times1}=\frac{10}{2}=5$

ومنه التعميل **:** $x^2-10x+25=a(x-x_1)^2=1(x-5)^2$

2) x^2-3x+2 $a=1$ و $b=-3$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times2=9-8=1=(1)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_1=\frac{3+\sqrt{1}}{2\times1}$ **و** $x_1=\frac{3-\sqrt{1}}{2\times1}$ يعني $x_1=2$ **و** $x_2=1$

ومنه التعميل **:** $x^2-3x-2=a(x-x_1)(x-x_2)=1(x-2)(x-1)$

3) $3x^2+x+2$ لدينا:

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times3\times2=1-24=-23<0$

ومنه فان هذه الحدودية لا يمكن تعميلها

تمرين 4:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

(1 $2x^2-4x+6\ge 0$ (2 $4x^2-8x+3\le 0$ (3 $x^2-3x-10<0$

أجوبة: (1 $2x^2-4x+6\ge 0$ $a=3>0$

$\Delta=b^2-4ac=16-48=-32<0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$P(x)=3x^2+6x+5$	$+$

ومنه: $S=\mathbb{R}$

(2 $4x^2-8x+3\le 0$ $a=4$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times4\times3=64-48=16>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{8+4}{2\times4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ و $x_1=\frac{8-4}{8}=\frac{1}{2}$ ومنه:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x^2-8x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

(3 $x^2-3x-10<0$ $a=4$

$\Delta=b^2-4ac=49>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=5$ و $x_2=-2$ ومنه:

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$4x^2-8x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=]-2,5[$

تمرين 4:

نعتبر الحدودية $3x^4-2x^2-1=0$

نضع : $Q(x)=x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}$

1. Δ هو مميز ثلاثية الحدود $Q(x)$ تأكد أن $\Delta=(\sqrt{2}-1)^2$
2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x)=0$
3. استنتج حلول المعادلة : $x-(\sqrt{2}+1)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$
4. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $Q(x)\ge 0$

أجوبة (1:

$\Delta=b^2-4ac=(\sqrt{2}+1)^2-4\times1\times\sqrt{2}$

$\Delta=(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\times1+(1)^2=(\sqrt{2}-1)^2$

(2 $Q(x)=x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{2\times1}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$x_1=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$ ومنه: $S=\{\sqrt{2},1\}$

(3 $x-(\sqrt{2}+1)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

يمكن كتابتها على الشكل : $(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2}+1)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

نضع: $X=\sqrt{x}$ والمعادلة تصبح على الشكل :

$X^2-(\sqrt{2}+1)X+\sqrt{2}=0$ حسب السؤال السابق : $X_1=\sqrt{2}$ أو $X_2=1$

يعني $\sqrt{x_1}=\sqrt{2}$ أو $\sqrt{x_2}=1$

يعني $(\sqrt{x_1})^2=(\sqrt{2})^2$ أو $(\sqrt{x_2})^2=(1)^2$

يعني $x_1=2$ أو $x_2=1$ $S=\{2,1\}$

(4 $Q(x)=0$ يعني $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$

يعني $x_1=\sqrt{2}$ أو $x_1=1$

x	$-\infty$		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=]-\infty;1]\cup[\sqrt{2};+\infty[$

تمرين 5:

1) حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية : $\begin{cases}-7x-3y=4\\4x+5y=-2\end{cases}$

2) استنتج حلول النظمة التالية : $\begin{cases}\frac{-7}{x}-\frac{3}{y}=4\\\frac{4}{x}+\frac{5}{y}=-2\end{cases}$

أجوبة: 1) محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix}-7&-3\\4&5\end{vmatrix}=-35+12=-23\neq0$

و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:

هو $x=\frac{\begin{vmatrix}4&-3\\-2&5\end{vmatrix}}{\Delta}=-\frac{14}{23}$ و $y=\frac{\begin{vmatrix}-7&4\\4&-2\end{vmatrix}}{\Delta}=-\frac{2}{23}$ ومنه: $S=\left\{\left(-\frac{14}{23},-\frac{2}{23}\right)\right\}$

2) لكي تكون للنظمة معنى يجب أن يكون لدينا : $x\neq0$ و $y\neq0$

$\begin{cases}\frac{-7}{x}-\frac{3}{y}=4\\\frac{4}{x}+\frac{5}{y}=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-7\frac{1}{x}-3\frac{1}{y}=4\\4\frac{1}{x}+5\frac{1}{y}=-2\end{cases}$ نضع: $X=\frac{1}{x}$ و $Y=\frac{1}{y}$

$x\neq0$ و $y\neq0$ فنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases}-7X-3Y=4\\4X+5Y=-2\end{cases}$

وسبق أن قمنا بحل هذه النظمة : $X=-\frac{14}{23}$ و $Y=-\frac{2}{23}$

و منه : $\frac{1}{x}=-\frac{14}{23}$ و $\frac{1}{y}=-\frac{2}{23}$ يعني: $x=-\frac{23}{14}$ و $y=-\frac{23}{2}$

و بالتالي: $S=\left\{\left(-\frac{23}{14},-\frac{23}{2}\right)\right\}$

تمرين 6:

حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية : $\begin{cases}2\sqrt{x}+\sqrt{y}=6\\-3\sqrt{x}+5\sqrt{y}=17\end{cases}$

أجوبة: نضع: $X=\sqrt{x}$ و $Y=\sqrt{y}$

فنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases}2X+Y=6\\-3X+5Y=17\end{cases}$

ونقوم بحل هذه النظمة ونجد : $X=1$ و $Y=4$

و منه : $\sqrt{x}=1$ و $\sqrt{y}=4$ يعني: $(\sqrt{x})^2=(1)^2$ و $(\sqrt{y})^2=4^2$

يعني: $x=1$ و $y=16$ و بالتالي: $S=\{(1,16)\}$

تمرين 7:

حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية : $\begin{cases}2x^2-5y^2=1\\4x^2+3y^2=15\end{cases}$

أجوبة: نضع: $X=x^2$ و $Y=y^2$

فنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases}2X-5Y=1\\4X+3Y=15\end{cases}$

ونقوم بحل هذه النظمة ونجد : $X=3$ و $Y=1$

و منه : $x^2=3$ و $y^2=4$

يعني: $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ و : $y=\sqrt{1}$ او $y=-\sqrt{1}$

يعني: $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ و : $y=1$ او $y=-1$

و بالتالي: $S=\left\{(\sqrt{3},1),(\sqrt{3},-1),(-\sqrt{3},1),(-\sqrt{3},-1)\right\}$

تمرين8 : نعتبر الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ بحيث:

$P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

و $Q(x)=x^2-4x+3$.

1. أنجز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x+2$.
2. وبين أن $Q(x)$ تقبل القسمة على $x-3$.
3. استنتج تعميلا للحدودية $P(x)$ إلى جذاء حدوديات من الدرجة الأولى.

الجواب :1)

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-5x+6 & x+2 \\ \cline{2-2} -x^3-2x^2 & x^2-4x+3 \\ \cline{1-1} -4x^2-5x+6 & \\ 4x^2+8x & \\ \cline{1-1} 3x+6 & \\ -3x-6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

2) 3 جذر للحدودية $Q(x)$: لأن $Q(3)=0$ ومنه $Q(x)$ تقبل القسمة على $x-3$

3) **وجدنا حسب السؤال 1** $P(x)=(x+2)\times(x^2-4x+3)$

وجدنا حسب السؤال2 $Q(x)$ تقبل القسمة على $x-3$

ننجز القسمة الاقليدية للحدودية $Q(x)$ على $x-3$

فنجد : $Q(x)=(x-3)\times(x-1)$

ومنه: $P(x)=(x+2)\times(x-3)\times(x-1)$

تمرين9: نعتبر المعادلة : $-2x^2+\sqrt{2}x+2=0$: (E)

1. بين أن المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين α و β بدون حسابهما
2. استنتج قيم ما يلي: $\alpha+\beta$ و $\alpha\times\beta$ و $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ و $\alpha^2+\beta^2$

و $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ و $\alpha^3+\beta^3$

الأجوبة: 1) $-2x^2+\sqrt{2}x+2=0$ اذن: $a=-2$ و $b=\sqrt{2}$ و $c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(\sqrt{2})^2-4\times2\times(-2)=2+16=18>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين : α و β

2) حسب خاصية لدينا : $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ و $\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$

ومنه : $\alpha+\beta=-\frac{\sqrt{2}}{-2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\alpha\times\beta=\frac{2}{-2}=-1$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

و لدينا : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ يعني $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$

يعني $\alpha^2+\beta^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2(-1)$ يعني $\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

ولدينا : $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}$ اذن : $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\frac{5}{2}}{-1}=-\frac{5}{2}$

ونعلم أن : $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

يعني $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2$

يعني $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

اذن : $\alpha^3+\beta^3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-3(-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

يعني $\alpha^3+\beta^3=\frac{\sqrt{2}^3}{2^3}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}+12\sqrt{2}}{8}=\frac{14\sqrt{2}}{8}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien