ملخص درس الاشتقاق

I. قابلية اشتقاق دالة عددية في نقطة

1) تعريف : لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة a إذا وجد عدد حقيقي l بحيث : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$

l يسمى العدد المشتق للدالة في النقطة a و نرمز له بالرمز : $f'(a)$

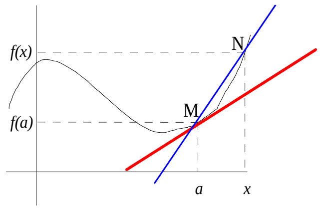
ونكتب : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

ملاحظة : الكتابة : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

تكافئ الكتابة : $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

2) التأويل الهندسي للعدد المشتق – معادلة مماس لمنحنى دالة في نقطة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.



المستقيم (Δ) المار من النقطة $M(a;f(a))$ و الذي معامله الموجه هو $f'(a)$ يسمى المماس للمنحنى (C_f) في النقطة M

خاصية : لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a

معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة $M(a;f(a))$ هي :

$$(\Delta)\ :\ y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2-2x+1$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=2$.
2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0=2$.

الجواب: 1) $f(2)=2^2-2\times2+1=1$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x+1-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x}{x-2}$$

$=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}x=2$ ومنه f قابلة للاشتقاق عند : $x_0=1$

و هو العدد المشتق عند $x_0=2$ $2=f'(2)$

2) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$$y=2x-3\Leftrightarrow y=1+2(x-2)\Leftrightarrow y=f(2)+f'(2)(x-2)$$

II. الاشتقاق على اليمين –الاشتقاق على اليسار

مثال : نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3+|x|$

1. أحسب $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (**قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند** $x_0=0$)
2. أحسب $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (**قابلية اشتقاق الدالة f على اليسارعند** $x_0=0$)
3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$ ؟
4. حدد معادلة لنصف مماس المنحنى الممثل للدالة f على اليمين عند $x_0=0$.
5. حدد معادلة لنصف مماس المنحنى الممثل للدالة f على اليسار عند $x_0=0$.
6. كيف نسمي النقطة $A(0,f(0))$ ؟

الجواب : $\begin{cases} f(x)=x^3+x; x\geq0 \\ f(x)=x^3-x; x\leq0 \end{cases}$ و $f(0)=0^3+|0|=0$

1) $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3+x-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x^2+1)}{x}=\lim_{x\to0^+}x^2+1=1$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=0$ و $1=f'_d(0)$

و هو العدد المشتق على اليمين عند $x_0=0$

2) $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3-x-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x^2-1)}{x}=\lim_{x\to0^+}x^2-1=-1$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=0$ و $-1=f'_g(0)$

و هو العدد المشتق على اليسار عند $x_0=0$

3) f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=0$

ولكن : $f'_d(0)\neq f'_g(0)$

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0=0$.

$$y=f(x_0)+f'_d(x_0)(x-x_0)$$

$$(\Delta_d):y=x\Leftrightarrow y=0+1(x-0)\Leftrightarrow y=f(0)+f'_d(0)(x-0)$$

5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0=0$.

$$y=f(x_0)+f'_g(x_0)(x-x_0)$$

$$(\Delta_g):y=-x\Leftrightarrow y=0-1(x-0)\Leftrightarrow y=f(0)+f'_g(0)(x-0)$$

6) لدينا $f'_d(0)\neq f'_g(0)$ النقطة : $A(0;f(0))$ تسمى نقطة مزواة

خاصية: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

f قابلة للاشتقاق على النقطة a تكافئ f قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة a و f قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة a و $f'_g(a)=f'_d(a)$

III. الدالة المشتقة لدالة عددية

1. الاشتقاق على مجال

تعريف: f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I

2. الدالة المشتقة

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $f'(x)$ و المعرفة كما يلي : $\begin{array}{l} f':I\to\mathbb{R} \\ x\to f'(x) \end{array}$

IV. جدول للدوال المشتقة لدوال اعتيادية و العمليات حول الدوال المشتقة

الدالة	الدالة المشتقة f'
$f(x)=k$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=ax$	$f'(x)=a$
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1} \qquad n\in\mathbb{Z}^*$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos(ax+b)$	$f'(x)=-a\sin(ax+b)$
$f(x)=\sin(ax+b)$	$f'(x)=a\cos(ax+b)$
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

الدالة	الدالة المشتقة f'
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$
$f(x)=u+v$	$f'(x)=u'+v'$
$f(x)=u-v$	$f'(x)=u'-v'$
$f(x)=k.u$	$f'(x)=k.u'$
$f(x)=u\times v$	$f'(x)=u'\times v+u\times v'$
$f(x)=u^n$	$f'(x)=nu^n\times u'$
$f(x)=\frac{1}{u}$	$f'(x)=-\frac{u'}{u^2}$
$f(x)=\frac{u}{v}$	$f'(x)=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$
$f(x)=\sqrt{u}$	$f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

V. الدالة المشتقة الثانية-المشتقات المتتالية

مثال : نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3-5x^2+4x-2$

أحسب المشتقة الأولى و الثانية و الثالثة

الجواب:

$$f'(x)=\left(x^3-5x^2+4x-2\right)'=3x^2-5\times2x^1+4-0=3x^2-10x+4$$

$f''(x)=\left(3x^2-10x+4\right)'=6x-10$ و $f'''(x)=\left(6x-10\right)'=6$

VI. تطبيقات الدالة المشتقة:

1. رتابة دالة وإشارة مشتقاتها

خاصية: لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I

- f تزايدية على مجال I يعني $\forall x\in I \quad f'(x)\geq 0$
- f تناقصية على مجال I يعني $\forall x\in I \quad f'(x)\leq 0$
- f ثابتة على مجال I يعني $\forall x\in I \quad f'(x)=0$

2. مطار يف دالة قابلة للاشتقاق

خاصية1: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة a وتقبل مطرا فا في النقطة a فان $f'(a)=0$

خاصية 2: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

إذا كانت f' تنعدم في النقطة a تتغير إشارتها فان $f(a)$ مطرا فا للدالة f

3. حل معادلة تفاضلية

تعريف: ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم .

- المعادلة $y''+\omega^2y=0$ ذات المجهول الدالة y حيث y'' مشتقتها الثانية تسمى معادلة تفاضلية.
- كل دالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ وتحقق المتساوية : $f''(x)+\omega^2 f(x)=0$ لكل x من $\mathbb{R}$ تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y''+\omega^2y=0$.

خاصية: ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم .

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+\omega^2y=0$ هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y:x\to\alpha\cos\omega x+\beta\sin\omega x$.

حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

ملحوظة : حل المعادلة التفاضلية : $y''+\omega^2y=0$ يعني تحديد الحل العام للمعادلة.

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية: $y''+16y=0$

الجواب $y''+4^2y=0\Leftrightarrow y''+16y=0$:

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+16y=0$ هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y:x\to\alpha\cos4x+\beta\sin4x$

حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$