

ملخص درس الجداء السلمى

I. الصيغة التحليلية للجداء السلمى فى معلم متعامد ممنظم
تعريف: ليكن $(\vec{i}; \vec{j})$ أساسا فى المستوى و O نقطة من المستوى نقول إن $(\vec{i}; \vec{j})$ أساس متعامد ممنظم إذا كان $\|\vec{i}\| = 1$ و $\|\vec{j}\| = 1$ و $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.
نقول إن المعلم $(0; \vec{i}; \vec{j})$ متعامد ممنظم إذا كان $(\vec{i}; \vec{j})$ أساسا متعامدا ممنظما.

دائما فى جميع فقرات الدرس ننسب المستوى إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(0; \vec{i}; \vec{j})$

خاصية: لتكن $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ متجهتين من المستوى , لدينا : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
وتكون المتجهتان \vec{u} و \vec{v} متعامدتين إذا فقط إذا كان : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

منظم متجه: لتكن $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ متجهة من المستوى منظم المتجهة \vec{u} نرمز له بالرمز $\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

المسافة بين نقطتين: لتكن $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$ نقطتين من المستوى , المسافة هي : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
ملاحظة : $\|\overline{AB}\| = AB$

صيغة cos و sin: لتكن $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ متجهتين غير منعدمتين من المستوى و θ قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{u; v})$

$$\text{لدينا: } \cos(\widehat{u; v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad \text{و} \quad \sin(\widehat{u; v}) = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

تعريف: ليكن (D) مستقيم فى المستوى

نسمي متجهة منظميه على المستقيم (D) , كل متجهة غير منعدمة ومتعامدة مع متجهة موجهة للمستقيم (D)

$\vec{n}(a; b)$ هي: $ax + by + c = 0$ متجهة منظمية على المستقيم (D)

خاصية: معادلة المستقيم (D) المار من النقطة $A(x_A; y_A)$ و $\vec{n}(a; b)$ متجهة منظمية عليه هي : $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$

مثال: حدد معادلة المستقيم (D) المار من النقطة $A(1; 2)$ و $\vec{n}(2; -3)$ متجهة منظمية عليه

الجواب: نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$ax + by + c = 0$ / (D) و $\vec{n}(a; b)$ متجهة منظمية عليه و نعلم أن : $\vec{n}(2; -3)$ متجهة منظمية على (D)

اذن : $a = 2; b = -3$ ومنه المعادلة تصبح : $(D) / 2x - 3y + c = 0$

ونعلم أن : $A(1; 2) \in (D)$ اذن احداثياته تحقق المعادلة يعني : $2 \times 1 - 3 \times 2 + c = 0$ يعني $c = 4$ ومنه : $(D) / 2x - 3y + 4 = 0$

خاصية: ليكن (D) و (D') مستقيمين معادلاتهما على التوالي : $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$

يكون المستقيمان (D) و (D') متعامدين إذا فقط إذا كانت متجهتهما المنظمتان عليهما متعامدتان أي : $aa' + bb' = 0$

تعريف: ليكن (D) مستقيما معادلته : $ax + by + c = 0$ و $A(x_A; y_A)$ نقطة من المستوى.

مسافة النقطة A عن المستقيم (D) هي : $d(A; (D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

مثال: $x - y + 2 = 0$ / (D) و $A(1; 4)$ حدد مسافة النقطة A عن المستقيم (D)

$$\text{الجواب: } d(A; (D)) = \frac{|1 - 4 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

خاصية: معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a; b)$

وشعاعها R ($R > 0$) هي : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

وتكتب أيضا : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ حيث : $c = a^2 + b^2 - R^2$

مثال 1: حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها $A(-1; -3)$ وشعاعها $R = \sqrt{2}$

الجواب: $(x - (-1))^2 + (y + 3)^2 = (\sqrt{2})^2$

يمكننا الاكتفاء بهذه الكتابة أو النشر فنجد : $(C) x^2 + y^2 + 2x + 6y + 8 = 0$

خاصية و تعريف: الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a; b)$

وشعاعها R ($R > 0$) هي مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوى

$$(S) \begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases} \text{ التي تحقق النظمة :}$$

و النظمة (S) تسمى تمثيلا بارامتريا للدائرة (C)

مثال: حدد تمثيلا بارامتريا للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;-2)$ وشعاعها $R = \sqrt{2}$

$$\text{الجواب: تمثيل بارامتريا للدائرة (C) هو: } \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \cos \theta \\ y = -2 + \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \text{ (} \theta \in \mathbb{R} \text{) بارامتريا حقيقي}$$

خاصية: لتكن a و b و c أعدادا حقيقية و (E) مجموعة النقط $M(x,y)$ بحيث $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

• تكون (E) دائرة إذا وفقط إذا كان: $a^2 + b^2 - 4c > 0$ ومركز هذه الدائرة هو $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$

$$\text{و شعاعها هو } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

• إذا كان $a^2 + b^2 - 4c < 0$ فان (E) هي المجموعة الفارغة

• إذا كان $a^2 + b^2 - 4c = 0$ فان (E) هي: $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$

تعريف: لتكن (C) دائرة مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها $R (R > 0)$ و M نقطة من المستوى

• تكون النقطة M نقطة من الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان: $\Omega M = R$

• تكون النقطة M خارج الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان: $\Omega M > R$

• تكون النقطة M داخل الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان: $\Omega M < R$

الأوضاع النسبية لمستقيم و دائرة في المستوى: لدراسة الوضع النسبي لمستقيم (D) و دائرة (C) مركزها Ω وشعاعها R يمكننا حساب $d(\Omega; (D))$ مسافة النقطة Ω عن المستقيم (D) ومقارنتها بالشعاع R وبالطبع هناك ثلاث حالات:

• إذا كانت $d(\Omega; (D)) > R$ فان: المستقيم (D) لا يقطع الدائرة (C)

• إذا كانت $d(\Omega; (D)) < R$ فان: المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

• إذا كانت $d(\Omega; (D)) = R$ فان: المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطة وحيدة و نقول أيضا أن (D) مماس للدائرة (C)

معادلة ديكارتية لمستقيم مماس لدائرة في نقطة معلومة:

تذكير: يكون المستقيم (D) مماسا للدائرة (C) ذات المركز Ω عند النقطة A إذا وفقط إذا كان: (D) عموديا على المستقيم (ΩA)

خاصية: لتكن الدائرة (C) التي معادلتها $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ و $A(x_A; y_A)$ نقطة من الدائرة (C)

$$\text{معادلة ديكارتية للمماس للدائرة (C) في النقطة } A \text{ هي: } (x - x_A) \left(\frac{a}{2} + x_A \right) + (y - y_A) \left(\frac{b}{2} + y_A \right) = 0$$

ملحوظة: حصلنا على معادلة المماس للدائرة (C) في النقطة A باستعمال التكافؤ: $\overline{AM} \cdot \overline{A\Omega} = 0 \Leftrightarrow M(x,y) \in (D)$

مثال: لتكن (C) الدائرة التي معادلتها الديكارتية هي: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ (1)

(1) تأكد أن $A(0;1) \in (C)$ ثم حدد مركز وشعاع الدائرة (C)

(2) معادلة لمماس للدائرة (C) في النقطة A

الجواب: (1) نتحقق أن إحداثيات $A(0;1)$ تحقق المعادلة (1)

$$A(0;1) \in (C) \text{ ومنه (1) } 0^2 + 1^2 - 4 \times 0 - 2 \times 1 + 1 = 0$$

$$\text{لدينا } a = 4; b = -2; c = 1 \text{ نحسب: } a^2 + b^2 - 4c = (4)^2 + (-2)^2 - 4 \times 1 = 16 + 4 - 4 = 16 > 0$$

$$\text{ومنه: (E) دائرة مركزها } \Omega\left(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2}\right) \text{ أي } \Omega(-2; 1) \text{ وشعاعها: } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$$

(2) معادلة لمماس للدائرة (C) في النقطة A ؟؟؟؟

$$\overline{AM} \cdot \overline{A\Omega} = 0 \Leftrightarrow M(x,y) \in (D) \text{ ولدينا: } \overline{AM}(x-0; y-1) \text{ و } \overline{A\Omega}(-2; 0)$$

$$-2(x-0) = 0 \Leftrightarrow -2(x-0) + 0(y-1) = 0 \Leftrightarrow M(x,y) \in (D)$$

$$x = 0 \Leftrightarrow M(x,y) \in (D)$$

ومنه معادلة مماس الدائرة (C) في النقطة $A(0;1)$ هو المستقيم الذي معادلته: $x = 0$ (D)