ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى الأولى باك علوم تجريبية

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

ملخص درس عموميات حول الدوال

I. مجموعة تعريف دالة عددية "تذكير"

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x.

مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية x بحيث $f(x)$ موجود أي $f(x)$ قابلة للحساب. و يرمز لها غالبا بالرمز D_f بمعنى: $x \in D_f$ تكافئ $f(x) \in \mathbb{R}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$

ملاحظات: 1) اذا كانت f دالة حدودية فان $D_f = \mathbb{R}$

اذا كانت f دالة معرفة على الشكل: $f(x) = \sqrt{P(x)}$ فان $D_f = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \geq 0\}$

اذا كانت f دالة معرفة على الشكل : $f(x) = \dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$ فان $D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) > 0\}$

II. الدالة المكبورة و الدالة المصغورة و الدالة المحدودة

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

- نقول إن f دالة مكبورة على مجال I إذا وجد عدد حقيقي M بحيث : $\forall x \in I \quad f(x) \leq M$
- نقول إن f دالة مصغورة على مجال I إذا وجد عدد حقيقي m بحيث : $\forall x \in I \quad f(x) \geq m$
- نقول إن f دالة محدودة على مجال I إذا كانت مكبورة و مصغورة على المجال I.

خاصية :لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.تكون f دالة محدودة على المجال I إذا وجد عدد حقيقي k بحيث : $\forall x \in I \quad |f(x)| \leq k$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^2 - 2x + 5$

بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 4

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x \in \mathbb{R} \; 4 \leq f(x)$

اذن نحسب الفرق : $f(x) - 4 = x^2 - 2x + 5 - 4 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$

ومنه : $\forall x \in \mathbb{R} \; 4 \leq f(x)$

وبالتالي f مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 4

III. الدالة الدورية

لتكن f دالة عددية و D مجموعة تعريفها.

نقول إن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث :

- إذا كانت $x \in D$ فان $x + T \in D$
- $\forall x \in D \quad f(x+T) = f(x)$

مثال : الدوال : $\cos$ و $\sin$ دورية و دورهم $T = 2\pi$

الدالة $\tan$ دالة دورية ودورها هو : $T = \pi$

IV. مطاريف دالة عددية

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و a عنصرا من المجال I

- نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال I, إذا كان : $\forall x \in I \quad f(x) \leq f(a)$
- نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال I, إذا كان : $\forall x \in I \quad f(x) \geq f(a)$

V. مقارنة دالتين

تعريف: لتكن f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g على التوالي مجموعة تعريفهما.

نقول إن f تساوي g ونكتب $f = g$ إذا وفقط إذا كان :

$D_g = D_f$ و $(\forall x \in D_f) \quad f(x) = g(x)$

تعريف: لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I. نقول إن f أصغر من أو يساوي g على مجال I ونكتب $f \leq g$

إذا وفقط إذا كان : $(\forall x \in I) \quad f(x) \leq g(x)$

التأويل الهندسي : $f \leq g$ على مجال I يعني هندسيا أن منحنى الدالة f يوجد تحت منحنى الدالة g على المجال I.

ملحوظة :

- $f < g$ على المجال I إذا وفقط إذا كان : $(\forall x \in I) \; f(x) < g(x)$
- $f \geq 0$ على المجال I إذا وفقط إذا كان : $(\forall x \in I) \; f(x) \geq 0$

مثال: قارن الدالتين العدديتين f و g المعرفتين كالتالي : $g(x)=4x-1$ و $f(x)=4x^2$ واعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$ لأنهم دوال حدودية

$f(x)-g(x)=4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geq 0$

ومنه : $f\geq g$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد فوق منحنى الدالة g على $\mathbb{R}$.

VI. مركب دالتين

تعريف: لتكن f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g على التوالي مجموعة تعريفهما. $D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f \text{ و } f(x)\in D_g\}$

الدالة العددية h المعرفة على $D_{g\circ f}$ بما يلي : $h(x)=g(f(x))$, تسمى مركب الدالتين f و g في هذا الترتيب ويرمز لها بالرمز $g\circ f$

ومنه : $\forall x\in D_{g\circ f}\quad (g\circ f)(x)=g(f(x))$

VII. رتابة دالة عددية

منحى تغيرات دالة عددية

تعريف: لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن مجموعة تعريفها.

- f تزايدية قطعا على المجال I إذا وفقط إذا كان : $(\forall(x_1,x_2)\in I^2)\ (x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2))$
- f تناقصية قطعا على المجال I إذا وفقط إذا كان : $(\forall(x_1,x_2)\in I^2)\ (x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2))$
- f ثابتة على المجال I إذا وفقط إذا كان: $(\forall(x_1,x_2)\in I^2)\ f(x_1)=g(x_2)$

ملحوظة: يمكن دراسة رتابة دالة f على مجال I بدراسة إشارة معدل التغير : $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ مع x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من I

• نقول إن f دالة رتيبة على I إذا كانت f تزايدية قطعا أو تناقصية قطعا على مجال I.

خاصية: لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f متماثلة بالنسبة للصفر. ليكن I مجالا من $\mathbb{R}^+$ ضمن D_f و I' مماثل I بالنسبة للصفر

إذا كانت f دالة زوجية فان :

- f تزايدية قطعا على المجال I إذا وفقط إذا كانت f تناقصية قطعا على المجال I'
- f تناقصية قطعا على المجال I إذا وفقط إذا كانت f تزايدية قطعا على المجال I'

إذا كانت f دالة فردية فان: f لها نفس الرتابة على كل من المجالين I و I'

VIII. رتابة مركب دالتين :

خاصية: لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على التوالي على المجالين I و J بحيث : $(\forall x\in I)\ f(x)\in J$ لدينا :

- إذا كانت f تزايدية قطعا على I و g تزايدية قطعا على J فان : $g\circ f$ تزايدية قطعا على I
- إذا كانت f تناقصية قطعا على I و g تناقصية قطعا على J فان : $g\circ f$ تزايدية قطعا على I
- إذا كانت f تزايدية قطعا على I و g تناقصية قطعا على J فان : $g\circ f$ تناقصية قطعا على I
- إذا كانت f تناقصية قطعا على I و g تزايدية قطعا على J فان : $g\circ f$ تناقصية قطعا على I

IX. دراسة الدالتين $x\to\sqrt{x+a}$ و $x\to ax^3$:

مثال1: لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x كالتالي : $f(x)=\sqrt{x+2}$

x	-2	-1	0	2	7
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3

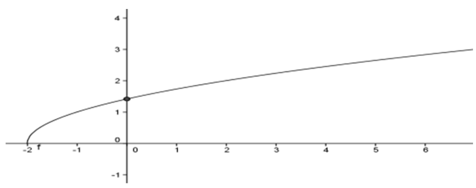
1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2\}=[-2,+\infty[$

2) ليكن : $x_1\in[-2;+\infty[$ و $x_2\in[-2;+\infty[$ بحيث $x_1<x_2$

اذن: $x_1+2<x_2+2$ ومنه $\sqrt{x_1+2}<\sqrt{x_2+2}$ أي $f(x_1)<f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $[-2;+\infty[$

x	-2	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$



مثال2 : لتكن f الدالة العددية المعرفة كالتالي: $f(x)=ax^3=\dfrac{1}{4}x^3$

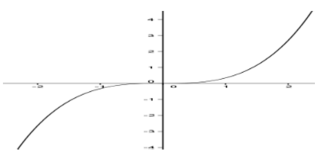
1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية $a=\frac{1}{4}>0$

2) ليكن: $x_1\in\mathbb{R}$ $x_2\in\mathbb{R}$ بحيث $x_1<x_2$

اذن: $x_1^3<x_2^3$ ومنه $\frac{1}{4}\times x_1^3<\frac{1}{4}\times x_2^3$ أي $f(x_1)<f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.5	-2	-1/4	0	1/4	2	6.5



x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

ملاحظة: اذا كان a سالب قطعا فان الدالة ستكون تناقصية على $\mathbb{R}$