

ملخص درس تحليلية الفضاء

1) تعريف: إذا كان \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} ثلاثة متجهات الفضاء غير مستوائية و O نقطة من نقول إن المثلث $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ أساس للفضاء ، و أن المربع $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم في الفضاء.

ملحوظة: أربع نقط O و A و B و C غير مستوائية تحدد لنا أساسا مثلا : $(\vec{OA}; \vec{OB}; \vec{OC})$

و معلما في الفضاء مثلا : $(O; \vec{OA}; \vec{OB}; \vec{OC})$.

2) خاصية: ليكن $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلما في الفضاء

لكل نقطة M من الفضاء توجد ثلاث أعداد حقيقية x و y و z بحيث : $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

و لكل متجهة \vec{u} من الفضاء يوجد مثلث واحد $(x; y; z)$ بحيث : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$(x; y; z)$ يسمى مثلث إحداثيات النقطة M

بالنسبة للمعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ و نكتب $M(x; y; z)$.

x يسمى أفصول النقطة M بالنسبة للمعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

y يسمى أرتوب النقطة M بالنسبة للمعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

z يسمى أنسوب النقطة M بالنسبة للمعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

$(x; y; z)$ يسمى مثلث إحداثيات المتجهة \vec{u} بالنسبة للأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ و نكتب $\vec{u}(x; y; z)$.

3) خاصية: لنكن $A(x_A; y_A; z_A)$ و $B(x_B; y_B; z_B)$ نقطتين

من الفضاء المنسوب إلى المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ و I منتصف القطعة $[AB]$

(1) مثلث إحداثيات المتجهة \vec{AB} هو $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

(2) مثلث إحداثيات النقطة I

هو $I\left(\frac{x_B + x_A}{2}; \frac{y_B + y_A}{2}; \frac{z_B + z_A}{2}\right)$

(3) المسافة : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

في كل ما يلي الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

4) شرط استقامية متجهتين

خاصية 1: لنكن $\vec{u}(x; y; z)$ و $\vec{v}(x'; y'; z')$ متجهتين غير منعدمتين.

المتجهتان \vec{u} و \vec{v} مستقيمتان إذا فقط إذا وجد عدد حقيقي k بحيث :

$$x' = kx \text{ و } y' = ky \text{ و } z' = kz$$

خاصية 2: لنكن $\vec{u}(x; y; z)$ و $\vec{v}(x'; y'; z')$ متجهتين من الفضاء .

\vec{u} و \vec{v} متجهتان مستقيمتان إذا فقط إذا كانت :

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0 \text{ و } \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0 \text{ و } \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$$

ملاحظة: لكي نبين أن ثلاث نقط A و B و C مستقيمية يكفي أن نبين

أن المتجهتين \vec{AB} و \vec{AC} مستقيمتين

مثال: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى الأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ المتجهات

$$\vec{u}(1; -1; 2) \text{ و } \vec{v}(-2; 2; -4) \text{ و } \vec{w}(1; 1; 2)$$

(1) أدرس استقامية المتجهتين \vec{u} و \vec{v}

(2) أدرس استقامية المتجهتين \vec{u} و \vec{w} **الأجوبة:** (1) نحسب المحددات المستخرجة لدينا

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0 \text{ و } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0 \text{ و } \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

ومنه المتجهتين \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين

$$(2) \text{ نحسب المحددات المستخرجة لدينا } \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0$$

ومنه المتجهتين \vec{u} و \vec{w} غير مستقيمتين

5) متجهات مستوائية:

تعريف: لنكن $\vec{u}(x; y; z)$ و $\vec{v}(x'; y'; z')$ و $\vec{w}(x''; y''; z'')$ ثلاث متجهات من الفضاء .

العدد الحقيقي : $x(y'z'' - z'y'') - y(x'z'' - z'x'') + z(x'y' - y'x')$

يسمى محددة المتجهات \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} و نرسم له

$$\text{بأحد الرمزين : } \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \text{ أو } \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$$

$$\text{ومنه لدينا : } \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

مثال نعتبر في الفضاء المنسوب إلى الأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ المتجهات

$$\vec{w}(-2; 0; 4) \text{ و } \vec{v}(0; -4; 4) \text{ و } \vec{u}(-1; 1; 1)$$

أحسب محددة المتجهات : \vec{u} و \vec{v} و \vec{w}

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -1(-16 - 0) - 1(0 - 8) + 1(0 - 8) = 16 - 8 - 8 = 0$$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -1 \times -16 - 1 \times 8 + 1 \times (-8) = 16 - 8 - 8 = 0$$

خاصية: لنكن \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} ثلاث متجهات من الفضاء.

\vec{u} و \vec{v} و \vec{w} متجهات مستوائية إذا فقط إذا كانت $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0$

نتيجة: المتجهات \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} غير مستوائية إذا فقط

$$\text{إذا كانت } \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \neq 0$$

ملاحظة: لكي نبين أن أربع نقط A و B و C و D مستوائية

يكفي أن نبين أن \vec{AB} و \vec{AC} و \vec{AD} مستوائية

6) تمثيل بارامتري لمستقيم في الفضاء:

تعريف: لنكن $A(x_A; y_A; z_A)$ نقطة من الفضاء

و $\vec{u}(a; b; c)$ متجهة غير منعدمة من الفضاء.

$$\text{النظمة : } \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ تسمى تمثيلا بارامتريا}$$

للمستقيم $D(A; \vec{u})$ المار من A و \vec{u} متجهة موجهة له.

7 تمثيل بارامترى لمستوى في الفضاء

تعريف: لتكن $A(x_A; y_A; z_A)$ نقطة من الفضاء

و $\vec{u}(a; b; c)$ و $\vec{v}(a'; b'; c')$ متجهتين غير مستقيمتين.

$$(P): \begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases}$$

حيث $(t \in \mathbb{R})$ و $(t' \in \mathbb{R})$ تسمى تمثيلا بارامتريا للمستوى $P(A; \vec{u}; \vec{v})$

المر من A و الموجه بالمتجهتين \vec{u} و \vec{v} .

مثال: حدد تمثيلا بارامتريا للمستوى $P(A; \vec{u}; \vec{v})$ حيث:

$$A(1; -3; 1) \text{ و } \vec{u}(-2; 4; 1) \text{ و } \vec{v}(-1; 0; 2)$$

الجواب: $(P): \begin{cases} x = 1 - 2t - t' \\ y = -3 + 4t \\ z = 1 + t + 2t' \end{cases}$ حيث $(t \in \mathbb{R})$ و $(t' \in \mathbb{R})$ هو تمثيل

بارامتريا للمستوى $P(A; \vec{u}; \vec{v})$

8 معادلة ديكارتية لمستوى

مثال: حدد معادلة ديكارتيه للمستوى (P) المر من $A(1; -3; 1)$

و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}(-2; 4; 1)$ و $\vec{v}(-1; 0; 2)$

الجواب: نلاحظ أن $\vec{u}(-2; 4; 1)$ و $\vec{v}(-1; 0; 2)$ غير مستقيمتين

$M(x; y; z) \in P(A; \vec{u}; \vec{v})$ يعني \vec{AM} و \vec{u} و \vec{v} مستوائية

يعني: $\det(\vec{AM}; \vec{u}; \vec{v}) = 0$ يعني: $\det(\vec{AM}; \vec{u}; \vec{v}) = 0$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ y+3 & 4 & 0 \\ z-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ يعني: } \vec{AM}(x-1; y+3; z-1)$$

$$(x-1) \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y+3) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{يعني: } 8x - 8 + 3y + 9 + 4z - 4 = 0 \text{ يعني: } 8(x-1) + 3(y+3) + 4(z-1) = 0$$

$$\text{يعني: } (P): 8x + 3y + 4z - 3 = 0$$

تعريف: لتكن $A(x_A; y_A; z_A)$ نقطة من الفضاء و \vec{u} و \vec{v} متجهتين

غير مستقيمتين. ومعادلة ديكارتيه للمستوى (P) المر من A و الموجه

بالمتجهتين \vec{u} و \vec{v} تكتب على الشكل: $ax + by + cz + d = 0$ حيث

a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث: $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.

خاصية: مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق العلاقة:

$ax + by + cz + d = 0$ بحيث: $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ هي مستوى

9 الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

خاصية: ليكن $(P) = P(A; \vec{u}; \vec{v})$ و $(Q) = P(B; \vec{u}'; \vec{v}')$ مستويين

من الفضاء لدينا:

$$1. \text{ إذا كان: } \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{v}') = 0 \text{ و } \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u}') = 0$$

فان: (P) و (Q) متطابقان أو متوازيان قطعاً.

$$2. \text{ إذا كان: } \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u}') \neq 0 \text{ أو } \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{v}') \neq 0$$

فان: (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم.

ملحوظة: ليكن (P) و (P') مستويين من الفضاء معرفين بمعادلتيهما

الديكارتيين: $ax + by + cz + d = 0$ مع (P) و $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ مع (P')

و $(a'; b'; c') \neq (0; 0; 0)$

1. يكون المستويان (P) و (P') متقاطعين إذا فقط

إذا كان: $ab' - ba' \neq 0$ أو $ac' - ca' \neq 0$ أو $bc' - cb' \neq 0$.

2. يكون المستويان (P) و (P') متوازيين إذا فقط إذا وجد عدد

حقيقي غير منعدم k بحيث: $a' = ka$ و $b' = kb$ و $c' = kc$.

3. يكون المستويان (P) و (P') منطبقين إذا فقط إذا وجد عدد

حقيقي غير منعدم k بحيث:

$$a' = ka \text{ و } b' = kb \text{ و } c' = kc \text{ و } d' = kd$$

مثال: $(Q): x - y - 2z - 3 = 0$ و $(P): 3x - 3y - 6z - 2 = 0$

الجواب: المستويان (P) و (P') متوازيين قطعاً $k = 3$

10 معادلتان ديكارتيان لمستقيم

تعريف و خاصية: ليكن $D(A; \vec{u})$ المستقيم المر من $A(x_A; y_A; z_A)$

و $\vec{u}(a; b; c)$ متجهة موجهة له.

إذا كانت: $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $c \neq 0$ فان النظمة:

$$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}$$

تسمى: معادلتان ديكارتيان للمستقيم D

إذا كان أحد الأعداد a أو b أو c منعدماً (مثلاً $a = 0$)

و $b \neq 0$ و $c \neq 0$ فان النظمة: $x = x_A$ و $\frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}$ تسمى:

معادلتان ديكارتيان للمستقيم D

إذا كان عدداً من الأعداد a أو b أو c منعدمان

(مثلاً $a = 0$ و $b = 0$ و $c \neq 0$) فان النظمة: $x = x_A$ و $y = y_A$

تسمى: معادلتان ديكارتيان للمستقيم D .

11 الأوضاع النسبية لمستويين ومستوى في الفضاء - دراسة تحليلية:

مثال 1: $(P): 3x - y - 2z - 2 = 0$ و $(D): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

أدرس الوضع النسبي للمستوى (P) و المستقيم (D)

الجواب: $(P): x + y - z + 1 = 0$ اذن: $(1+t) + (2-t) - (3+2t) + 1 = 0$

يعني $t = \frac{1}{2}$ اذن: (D) يقطع المستوى (P) في النقطة:

$$A\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 4\right) \text{ هي نقطة التقاطع}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ y = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ z = 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 4 \end{cases}$$

مثال 2: $(P): 3x - y - 2z - 2 = 0$ و $(D): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

أدرس الوضع النسبي للمستوى (P) و المستقيم (D)

الجواب: $(P): 5x + 2y - 3z - 10 = 0$ اذن:

$$5(1+2t) + 2(-1+t) - 3(-2+4t) - 10 = 0$$

اذن: (P) و (D) متوازيان قطعاً

خاصية: ليكن $(D) = D(A; \vec{w})$ و $(P) = P(B; \vec{u}; \vec{v})$

إذا كان $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0$ و $A \in (P)$ فان $(D) \subset (P)$

إذا كان $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \neq 0$ و $A \notin (P)$ فان (D) يوازي قطعاً (P)

إذا كان $\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \neq 0$ فان (D) يخترق (P) .