

ملخص درس المتجهات في الفضاء

I. تساوي متجهتين

(1) عناصر متجهة: A و B نقطتان من الفضاء , إذا رمزنا للمتجهة \vec{AB} بالرمز \vec{u} فان :

- اتجاه \vec{u} هو المستقيم (AB) .
- منحنى هو المنحنى من A نحو B
- منظم \vec{u} هي المسافة AB ونكتب : $\|\vec{u}\| = AB$

(2) ملحوظة: لكل نقطة A من الفضاء , المتجهة \vec{AA} ليس لها اتجاه و منظمها منعدم ؛ $\vec{AA} = \vec{0}$ تسمى المتجهة المنعدمة , ونكتب

لكل متجهة \vec{u} من الفضاء , لكل نقطة A من الفضاء , توجد نقطة وحيدة M من الفضاء بحيث : $\vec{u} = \vec{AM}$

(3) تعريف: نقول إن متجهتين متساويتان , اذا كان لهما نفس الاتجاه ونفس المنحنى ونفس المنظم.

(4) خاصية: ليكن $ABCD$ رباعيا من الفضاء لدينا :

$ABCD$ متوازي الأضلاع اذا وفقط اذا كان $\vec{AB} = \vec{DC}$.

مثال: لنكن A و B و C و D أربع نقط غير مستقيمية

بين أنه اذا كان : $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$ لكل M من الفضاء فان : $ABCD$ متوازي الأضلاع.

الجواب: يكفي أن نبين مثلا أن : $\vec{AB} = \vec{DC}$ ؟؟؟؟

لدينا : $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MA} + \vec{AB} + \vec{MC} + \vec{CD}$ يعني $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$ يعني $\vec{AB} = \vec{DC}$ يعني $\vec{0} = \vec{AB} + \vec{CD}$

II. مجموع متجهتين

(1) تعريف: لنكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين من الفضاء

مجموع المتجهتين \vec{u} و \vec{v} هي المتجهة \vec{w} بحيث : اذا وضعنا $\vec{AB} = \vec{u}$ و $\vec{BC} = \vec{v}$ فان : $\vec{AC} = \vec{w}$ ونكتب : $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

(2) علاقة شال: لكل A و B و C نقط من الفضاء

لدينا : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

(3) مقابل متجهة: لنكن \vec{u} متجهة من الفضاء , مقابل المتجهة \vec{u} هي المتجهة التي نرسم لها بالرمز $-\vec{u}$ و التي لها نفس اتجاه \vec{u} ونفس منظم \vec{u} ولكن منحاه هو

عكس منحنى \vec{u} ولدينا $\vec{BA} = -\vec{AB}$ لكل A و B من الفضاء .

لنكن A و B و C و D أربع نقط من الفضاء

مثال: نضع : $\vec{u} = 3\vec{MA} - 2\vec{MC} + 4\vec{MB} - 5\vec{MD}$ لكل M من الفضاء

بين أن : المتجهة \vec{u} غير مرتبطة بالنقطة M

الجواب : $\vec{u} = 3\vec{MA} - 2\vec{MA} - 2\vec{AC} + 4\vec{MA} + 4\vec{AB} - 5\vec{MA} - 5\vec{AD}$

1. $\vec{u} = -2\vec{AC} + 4\vec{AB} - 5\vec{AD}$ ومنه المتجهة \vec{u} غير مرتبطة بالنقطة M

2. $3\vec{MA} - 2\vec{MA} - 2\vec{AC} + 4\vec{MA} + 4\vec{AB} - 5\vec{MA} - 5\vec{AD}$

3. $\vec{u} = 3\vec{MA} - 2\vec{MA} - 2\vec{AC} + 4\vec{MA} + 4\vec{AB} - 5\vec{MA} - 5\vec{AD}$

III. استقامية متجهتين و التعريف المتجهي لمستقيم ومستوى

تعريف: لنكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين من الفضاء

نقول ان \vec{u} و \vec{v} مستقيمتان اذا وجد عدد حقيقي k بحيث : $\vec{v} = k\vec{u}$

خاصية : لنكن A و B و C و D نقط من الفضاء بحيث

$A \neq B$ و $C \neq D$ و $\vec{CD} = \vec{AB}$ و $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ و $(AB) \parallel (CD)$

مثال: ليكن $ABCD$ رباعي الأوجه

نعتبر النقط M و N و P و Q أربع نقط بحيث :

$\vec{AM} = 2\vec{AB}$ و $\vec{AN} = 2\vec{AD}$ و $\vec{CQ} = 3\vec{CB}$ و $\vec{CP} = 3\vec{CD}$

1. أكتب كلا من المتجهتين \vec{MN} و \vec{PQ} بدلالة \vec{BD}

2. استنتج أن المتجهتين \vec{MN} و \vec{PQ} مستقيمتان .

3. ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (MN) و (PQ) ؟

أجوبة: (1) $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN} = -\vec{AM} + \vec{AN} = -2\vec{AB} + 2\vec{AD} = 2(\vec{AD} - \vec{AB}) = 2\vec{BD}$

$\vec{PQ} = \vec{PC} + \vec{CQ} = -\vec{CP} + \vec{CQ} = -3\vec{CD} + 3\vec{CB} = -3(\vec{CD} - \vec{CB}) = -3\vec{BD}$

$\vec{PQ} = -3(\vec{CD} + \vec{BC}) = -3(\vec{BC} + \vec{CD}) = -3\vec{BD}$

(2) وجدنا $\vec{BD} = \frac{1}{2}\vec{MN}$ يعني $\vec{MN} = 2\vec{BD}$

ووجدنا $\vec{BD} = -\frac{1}{3}\vec{PQ}$ يعني $\vec{PQ} = -3\vec{BD}$

من ① و ② نستنتج أن : $\frac{1}{2}\vec{MN} = -\frac{1}{3}\vec{PQ}$ أي $\vec{MN} = -\frac{2}{3}\vec{PQ}$

ومنه المتجهتين \vec{MN} و \vec{PQ} مستقيمتان .

(3) وجدنا $\vec{MN} = -\frac{2}{3}\vec{PQ}$ اذن المستقيمان (MN) و (PQ) متوازيان

IV. التعريف المتجهي لمستقيم في الفضاء :

لنكن نقطة A من الفضاء و \vec{u} متجهة غير منعدمة

المستقيم (D) الذي يمر من A و \vec{u} متجهة موجهة له نرسم له

بالرمز $D(A; \vec{u})$ ولدينا : $\vec{AM} = k\vec{u}$ و $M \in D \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}; \vec{AM} = k\vec{u}$

$M \in (AB) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}; \vec{AM} = k\vec{AB}$

V. التعريف المتجهي لمستوى في الفضاء :

A و B و C ثلاث نقط من الفضاء غير مستقيمية

\vec{AB} و \vec{AC} متجهتين غير مستقيمتين و A و B و C تكون لنا مستوى $(P) = ABC$ نقول $(P) = ABC$ مستوى يمر من النقطة A و

\vec{AB} و \vec{AC} متجهتين موجهتين له ونكتب : $P(A; \vec{u}; \vec{v}) = ABC$

$M \in P(A; \vec{u}; \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{AM}$ مستوائية و \vec{v} و \vec{u}

$M \in P(A; \vec{u}; \vec{v}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}; \vec{AM} = k\vec{u}$

$M \in P(A; \vec{u}; \vec{v}) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R}; \vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$

$M \in ABC \Leftrightarrow \vec{AM}$ و \vec{AC} و \vec{AB} مستوائية

مثال: ليكن $ABCD$ رباعي الأوجه و M نقطة من الفضاء بحيث :

$\vec{AM} = \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{DC}$

(1) أكتب المتجهة \vec{AM} بدلالة \vec{AB} و \vec{AC}

(2) استنتج أن النقطة M تنتمي إلى المستوى (ABC)

(3) استنتج أن المتجهات \vec{IJ} و \vec{AB} و \vec{EC} مستوائية .

أجوبة: (1) $\vec{AM} = \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{DC} = \vec{AB} + \vec{BD} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{DA} + \vec{AC} = \frac{3}{2}\vec{AB} + \vec{AC}$

(2) وجدنا $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AC}$ ومنه النقطة M تنتمي إلى المستوى

(3) وجدنا $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AC}$ ومنه المتجهات \vec{AM} و \vec{AB} و \vec{AC} مستوائية