الأعداد العقدية

I) عموميات:

1) تعريف:

نقبل الخاصية التالية:

توجد مجموعة نرمز لها ب $\mathbb{C}$ تحتوي على $\mathbb{R}$ $(\mathbb{R}\subset\mathbb{C})$ وتحقق ما يلي:

1) تحتوي المجموعة $\mathbb{C}$ على عنصر غير حقيقي نرمز له ب i ويحقق $i^2=-1$

2) كل عنصر z من $\mathbb{C}$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل: $z=a+ib$ مع $a,b\in\mathbb{R}$

3) المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بعملتي الجمع والضرب اللتان تمددان عمليتي الجمع والضرب في $\mathbb{R}$ ولهما نفس الخاصيات.

ملاحظات:

*) $\mathbb{C}=\{z=a+ib\,/\,a,b\in\mathbb{R},\ i^2=-1\}$.

*) $\mathbb{C}$ تسمى مجموعة الأعداد العقدية وكل عنصر من $\mathbb{C}$ يسمى عدد عقدي.

*) ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع a و b من $\mathbb{R}$.
هذه الكتابة تسمى الشكل الجبري للعدد z.
العدد a يسمى الجزء الحقيقي ل z. نكتب $Ré(z)=a$.
العدد b يسمى الجزء التخيلي ل z. نكتب $\mathrm{Im}(z)=b$.
إذا كان $b=0$ فإن $z=a\in\mathbb{R}$
إذا كان $a=0$ فإن $z=ib$ ونقول z تخيلي صرف: $z\in i\mathbb{R}$.

أمثلة:

*) $z=2-3i$ لدينا $Ré(z)=2$ و $\mathrm{Im}(z)=-3$

*) $z=-4i$ $Ré(z)=0$ و $\mathrm{Im}(z)=-4$

لدينا $z\in i\mathbb{R}$.

2) قواعد الحساب في $\mathbb{C}$.

a) تساوي عددين عقديين:

ليكن $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ من $\mathbb{C}$

بما أن كل عدد عقدي يكتب بطريقة وحيدة على شكله الجبري.

فإن: $z=z'\Leftrightarrow a=a',\ b=b'$.

لدينا $\begin{cases} z=a+ib\\ 0=0+i0\end{cases}$ من $z=0\Leftrightarrow a=0,\ b=0$

خاصية:

ليكن a و b و a' و b' من $\mathbb{R}$ لدينا:

*) $a+ib=a'+ib'\Leftrightarrow a=a',\ b=b'$ هذا يعني:

$$z=z'\Leftrightarrow\begin{cases}Ré(z)=Ré(z')\\ \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')\end{cases}$$

*) $a+ib=0\Leftrightarrow a=0,\ b=0$

هذا يعني: $z=0\Leftrightarrow\begin{cases}Ré(z)=0\\ \mathrm{Im}(z)=0\end{cases}$

b) بنية $(\mathbb{C},+,\times)$

*) الجمع تجميعي وتبادلي في $\mathbb{C}$.

*) الجمع يقبل عنصرا محايدا هو 0: $0+z=z+0=z$

*) كل عنصر z من $\mathbb{C}$ يقبل مقابلا نرمز له ب $-z$: $z+(-z)=(-z)+z=0$.

*) نلخص الخاصيات السابقة بقولنا $(\mathbb{C},+)$ زمرة تبادلية.

*) الضرب تجميعي وتبادلي في $\mathbb{C}$.

*) الضرب توزيعي بالنسبة للجمع: $z(z'+z'')=zz'+zz''$

← نلخص الخاصيات السابقة بقولنا: $(\mathbb{C},+,\times)$ حلقة تبادلية.

*) العدد 1 هو العنصر المحايد في $\mathbb{C}$ بالنسبة للضرب.

*) كل عنصر من $\mathbb{C}^*$ يقبل مقلوبا نرمز له ب $\frac{1}{z}$ أو z^{-1}

$\frac{1}{z}\times z=z\times\frac{1}{z}=1$.

← نلخص كل الخاصيات السابقة بقولنا: $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.

خاصية: $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.

c) الجمع والضرب في $\mathbb{C}$:

ليكن $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ من $\mathbb{C}$ مع a,b,a',b'.

*) لدينا:
$$\begin{aligned}z+z'&=(a+ib)+(a'+ib')\\&=a+ib+a'+ib'\\&=a+a'+ib+ib'\\&=a+a'+i(b+b')\end{aligned}$$

*) لدينا:
$$\begin{aligned}zz'&=(a+ib)(a'+ib')\\&=aa'+ib'a+iba'-bb'\\&=(aa'-bb')+i(b'a+ba')\end{aligned}$$

خاصية:

ليكن a و b و a' و b' من $\mathbb{R}$. لدينا:

*) $(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')$

*) $(a+ib)(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+ba')$

d) مقابل ومقلوب عدد عقدي:

*) ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$.

لنبحث عن z' بحيث $z+z'=0$

نضع $z'=a'+ib'$

$$z+z'=0\Leftrightarrow(a+a')+i(b+b')=0$$

لدينا: $\Leftrightarrow\begin{cases}a+a'=0\\ b+b'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a'=-a\\ b'=-b\end{cases}$

إذن: $z'=-a+i(-b)$

إذن مقابل $z=a+ib$ هو: $-z=-a+i(-b)$

*) ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}^*$

لنبحث عن z' بحيث $zz'=1$

نضع $z'=a'+ib'$

$$zz'=1\Leftrightarrow(aa'-bb')+i(ab'+ba')=1$$

لدينا: $\Leftrightarrow\begin{cases}aa'-bb'=1\\ ba'+b'a=0\end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}a&-b\\ b&a\end{vmatrix}=a^2+b^2$$

ولدينا $z\in\mathbb{C}^*$ إذن $a\neq0$ أو $b^2\neq0$

إذن $a^2\rangle0$ أو $b^2\rangle0$ إذن $\Delta\neq0$

$$\Delta^*_{a'}=\begin{vmatrix}1 & -b\\ 0 & a\end{vmatrix}=a \qquad \Delta_{b'}=\begin{vmatrix}a & 1\\ b & 0\end{vmatrix}=-b$$

إذن $a'=\frac{a}{a^2+b^2}$; $b'=\frac{-b}{a^2+b^2}$

إذن: $z'=\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}$

إذن مقلوب $z=a+ib$ هو: $\boxed{\frac{1}{z}=\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}}$

ملاحظة:

عمليا للحصول على مقلوب عدد عقدي يتبع ما يلي:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{a-ib}{a^2-(ib)^2}$$
$$=\frac{a-ib}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$$

e) متطابقات هامة:

جميع المتطابقات الهامة التي نعرفها في $\mathbb{R}$ تبقى صحيحة في $\mathbb{C}$.

f) قوى العدد i:

لدينا: $i^2=-1$ $\quad i^3=i^2.i=-i$

$i^4=i^2.i^2=1$

$i^5=i^4.i=i$

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$

*) إذا كان $n=4k$: $\quad i^n=i^{4k}=\left(i^4\right)^k=1$

*) إذا كان $n=4k+1$: $\quad i^n=i^{4k+1}=i^{4k}.i=i$

*) إذا كان $n=4k+2$: $\quad i^n=i^{4k+2}=i^{4k}.i^2=-1$

*) إذا كان $n=4k+3$: $\quad i^n=i^{4k+3}=i^{4k}.i^3=-i$

إذن: $i^n=\begin{cases}1; & n=4k\\ i; & n=4k+1\\ -1; & n=4k+2\\ -i; & n=4k+3\end{cases}$

تمرين تطبيقي:

*)حساب:

$$z=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}=\left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{50}$$
$$=\left(\frac{(1+i)^2}{2}\right)^{50}=\left(\frac{2i}{2}\right)^{50}=i^{50}=i^{4\times12+2}$$
$$=\left(i^4\right)^{12}\times i^2=-1$$

ملاحظة:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$$

$\frac{1+i}{\sqrt{2}}\neq-\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ و $\frac{1+i}{\sqrt{2}}\neq\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

$u^n=v^n \not\Rightarrow u=v$ أو $u=-v$

II) مرافق عدد عقدي:

1) تعريف.

ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع a و b من $\mathbb{R}$.
نسمي مرافق العدد z العدد الذي نرمز له ب $\bar{z}$ المعرف بما يلي:
$\bar{z}=a-ib$.

أمثلة:

*) $z=2-4i$ $\quad \bar{z}=2+4i$

*) $z=-1-i$ $\quad \bar{z}=-1+i$

*) $z=2i-4$ $\quad \bar{z}=-2i-4$

*) $z=5$ $\quad \bar{z}=5$

*) $z=2i$ $\quad \bar{z}=-2i$

2) خاصيات:

1- ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع a و b من $\mathbb{R}$.

*) $\bar{z}=a-ib$

$$z=\bar{z}\Leftrightarrow a+ib=a-ib$$
$$\Leftrightarrow 2ib=0\Leftrightarrow 2b=0\Leftrightarrow b=0$$
$$\Leftrightarrow z=a$$
$$\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$$

*) ولدينا:

$$\bar{z}=-z\Leftrightarrow a-ib=-a-ib$$
$$\Leftrightarrow 2a=0$$
$$\Leftrightarrow a=0$$
$$\Leftrightarrow z=ib$$
$$\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$$

إذن $\boxed{\begin{array}{l} z=\bar{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}\\ z=-\bar{z}\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}\end{array}}$

2) $\boxed{\bar{\bar{z}}=z \quad ; \quad z=z'\Leftrightarrow \bar{z}=\bar{z'}}$

3) ليكن $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ من $\mathbb{C}$

لدينا: $z+z'=(a+a')+i(b+b')$

إذن:

$$\overline{z+z'}=(a+a')-i(b+b')$$
$$=a-ib+a'-ib'$$
$$=\bar{z}+\bar{z'}$$

إذن $\boxed{\begin{array}{l}\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}\\ \text{و: } \overline{z_1+z_2+....+z_n}=\bar{z_1}+\bar{z_2}+....+\bar{z_n}\end{array}}$

4) ليكن $z=x+iy$ من $\mathbb{C}$ مع x و y من $\mathbb{R}$

لدينا: $\bar{z}=x-iy$

$$\boxed{\begin{array}{ll} z+\bar{z}=2x & =2R\acute{e}(z)\\ z-\bar{z}=2iy & =2i\,\mathrm{Im}(z)\\ z.\bar{z}=x^2+y^2 & \end{array}}$$

5) ليكن $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ من $\mathbb{C}$ مع a,b,a',b' من $\mathbb{R}$.

لدينا:

$$z.z'=(aa'-bb')+i(ab'+ba')$$

إذن $\overline{zz'}=(aa'-bb')-i(ab'+ba')$

ولدينا:

$$\bar{z}.\bar{z'}=(a-ib)(a'-ib')$$
$$=aa'-ib'a-iba'-bb'$$
$$=(aa'-bb')-i(ab'+ba')$$

إذن: $\overline{z.z'}=\bar{z}.\bar{z'}$

إذن:

$$\boxed{\begin{array}{l}\overline{z.z'}=\overline{z}.\overline{z'}\\ \overline{z_1.z_2......z_n}=\overline{z_1}.\overline{z_2}......\overline{z_n}\\ \overline{z^n}=(\overline{z})^n\ (n\in\mathbb{N})\end{array}}$$

6) ليكن z وz' من $\mathbb{C}$ بحيث $z'\neq 0$

لدينا: $\frac{z}{z'}.z'=z$

إذن: $\overline{\frac{z}{z'}.z'}=\overline{z}$

يعني: $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}.\overline{z'}=\overline{z}$

إذن: $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}\\ \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\overline{z'}}\end{array}}$$

7) نعتبر الحدودية

$$P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+....+a_1z+a_0$$

حيث المعاملات a_i حقيقية. $(a\in\mathbb{R})$.

نفترض أن α حل للمعادلة $p(z)=0$ $(\alpha\in\mathbb{C})$

لنبين أن $\overline{\alpha}$ حل للمعادلة $P(z)=0$ يعني $P(\overline{\alpha})=0$

لدينا α حل ل $P(z)=0$ يعني: $P(\alpha)=0$

يعني: $a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+...+a_1\alpha+a_0=0$

يعني: $\overline{a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+...+a_1\alpha+a_0}=\overline{0}$

يعني: $\overline{a_n}\,\overline{\alpha^n}+\overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha^{n-1}}+...+\overline{a_1}\,\overline{\alpha}+\overline{a_0}=0$

ولدينا $a_i\in\mathbb{R}$ إذن $\overline{a_i}=a_i$

ومنه: $a_n\overline{\alpha}^n+a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1}+...+a_1\overline{\alpha}+a_0=0$

يعني: $P(\overline{\alpha})=0$

إذن $\overline{\alpha}$ حل للمعادلة $P(z)=0$.

خاصية:

لتكن $P(z)$ حدودية معاملاتها حقيقية.
إذا كان α حلا للمعادلة $P(z)=0$ فإن $\overline{\alpha}$ حل ل $P(z)=0$.

تمارين تطبيقية:

تمرين1

نعتبر العددين:

$$u=(a+2i)^n+(a-2i)^n\ ,\ v=(a+2i)^n-(a-2i)^n$$

حيث $a\in\mathbb{R}$

* بين أن u حقيقي و v تخيلي صرف:

لدينا:

$$\overline{u}=\overline{(a+2i)^n+(a-2i)^n}$$
$$=\overline{(a+2i)^n}+\overline{(a-2i)^n}$$
$$=\left(\overline{a+2i}\right)^n+\left(\overline{a-2i}\right)^n$$
$$=(a-2i)^n+(a+2i)^n \qquad (a\in\mathbb{R})$$
$$=u$$

$u=\overline{u}$ إذن $u\in\mathbb{R}$

طريقة أخرى:

$$u=(a+2i)^n+(a-2i)^n$$
$$=(a+2i)^n+\left(\overline{a+2i}\right)^n$$
$$=(a+2i)^n+\overline{(a+2i)^n}=2R\acute{e}\left((a+2i)^n\right)$$

إذن $u\in\mathbb{R}$

لدينا:

$$\overline{v}=\overline{(a+2i)^n-(a-2i)^n}$$
$$=\left(\overline{a+2i}\right)^n-\left(\overline{a-2i}\right)^n$$
$$=(a-2i)^n-(a+2i)^n=-v$$

$v=-\overline{v}$ إذن $v\in i\mathbb{R}$

طريقة (2):

$$v=(a+2i)^n-(a-2i)^n$$
$$=(a+2i)^n-\left(\overline{a+2i}\right)^n$$
$$=(a+2i)^n-\overline{(a+2i)^n}=2i\,\mathrm{Im}\left((a+2i)^n\right)$$

إذن $v\in i\mathbb{R}$

تمرين2

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية

1) $(1+i)z-2iz+1-i=3z-i$

2) $(1+i)z-(2i+1)\overline{z}+1-i=3z-i$

3) $iz\overline{z}-(2i+1)\overline{z}+2-i=1+i$

III- معيار عدد عقدي: Module d’un complexe

1- تعريف:

ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع a وb من $\mathbb{R}$
نسمي معيار العدد z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له ب $|z|$
والمعرف بما يلي: $|z|=\sqrt{z.\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$

أمثلة:

*) $z=1-i$: $|z|=\sqrt{2}$

*) $z=3+4i$: $|z|=5$

*) $z=-4$: $|z|=4$

*) $z=3$: $|z|=3$

*) $z=-5i$: $|z|=5$

ملاحظات:

*) $|z|\in\mathbb{R}^+$ $(\forall z\in\mathbb{C})$

*) إذا كان $z=a\in\mathbb{R}$ قيمة مطلقة ← معيار. $|z|=\sqrt{a^2+0^2}=|a|$

*) إذا كان: $z=ib$ $(b\in\mathbb{R})$ $|z|=\sqrt{b^2}=|b|$

*) ليكن $z=x+iy$ مع x وy من $\mathbb{R}$

$$|z|^2=z.\overline{z}=x^2+y^2$$

*) $|z|^2\neq z^2$ لأن $z^2\in\mathbb{C}$ و $|z|^2\in\mathbb{R}^+$

*) ليكن z وz' من $\mathbb{C}$ بحيث $z'\neq 0$

لدينا: $\frac{z}{z'}=\frac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}}=\frac{z\overline{z'}}{|z'|^2}$

مثال:

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{|c+id|^2}$$
$$=\frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}$$

2) خاصيات:

1− ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$

لدينا $\begin{cases}a^2\le a^2+b^2\\ b^2\le a^2+b^2\end{cases}$ إذن $\begin{matrix}|a|\le\sqrt{a^2+b^2}\\ |b|\le\sqrt{a^2+b^2}\end{matrix}$

إذن $\begin{matrix}a\le|a|\le\sqrt{a^2+b^2}\\ b\le|b|\le\sqrt{a^2+b^2}\end{matrix}$

خاصية:

$$\boxed{\begin{matrix}R\acute{e}(z)\le|R\acute{e}(z)|\le|z|\\ \mathrm{Im}(z)\le|\mathrm{Im}(z)|\le|z|\end{matrix}}$$

2− ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$

$$|z|=0\Leftrightarrow|z|^2=0$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2=0\Leftrightarrow a^2=0 \text{ و } b^2=0$$
$$\Leftrightarrow a=0 \text{ و } b=0$$

خاصية:

$$\boxed{(\forall z\in\mathbb{C})\ |z|=0\Leftrightarrow z=0}$$

3− ليكن z و z' من $\mathbb{C}$

$$|zz'|^2=zz'.\overline{zz'}=zz'.\bar{z}.\bar{z'}$$
$$=z.\bar{z}.z'.\bar{z'}=|z|^2.|z'|^2$$
$$=(|z|.|z'|)^2$$

إذن: $|zz'|=|z|.|z'|$

خاصية:

$$\boxed{\begin{matrix}|z.z'|=|z|.|z'|\\ \left|\prod_{i=1}^{n}z_i\right|=\prod_{i=1}^{n}|z_i|\\ |z^n|=|z|^n\quad(n\in\mathbb{N})\end{matrix}}$$

4− ليكن z و z' من $\mathbb{C}$ بحيث $z'\neq0$

$$\left|\frac{z}{z'}\right|^2=\left(\frac{z}{z'}\right)\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$$
$$=\frac{z}{z'}.\frac{\bar{z}}{\bar{z'}}=\frac{z\bar{z}}{z'\bar{z'}}=\frac{|z|^2}{|z'|^2}$$

إذن: $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$

خاصية:

z و z' من $\mathbb{C}$ بحيث $z'\neq0$

$$\boxed{\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}\qquad\left|\frac{1}{z'}\right|=\frac{1}{|z'|}}$$

5− ليكن z و z' من $\mathbb{C}$

لنبين أن $|z+z'|\le|z|+|z'|$

لدينا:

$$|z+z'|^2=(z+z').(\overline{z+z'})$$
$$=(z+z').(\bar{z}+\bar{z'})$$
$$=z\bar{z}+z\bar{z'}+z'\bar{z}+z'\bar{z'}$$
$$=|z|^2+z\bar{z'}+z'\bar{z}+|z'|^2$$

لنبين أن $z\bar{z'}+z'\bar{z}\le2|z||z'|$

لدينا: $z\bar{z'}+z'\bar{z}=z\bar{z'}+\overline{z\bar{z'}}=2R\acute{e}(z\bar{z'})$

ونعلم أن: $R\acute{e}(z\bar{z'})\le|z\bar{z'}|$

يعني: $2R\acute{e}(z\bar{z'})\le2|z\bar{z'}|$

$$z\bar{z'}+z'\bar{z}\le2|z||\bar{z'}|$$
$$|z|^2+|z'|^2+z\bar{z'}+z'\bar{z}\le|z|^2+|z'|^2+2|z||z'|$$

إذن: $|z+z'|^2\le(|z|+|z'|)^2$

خاصية: $\boxed{|z+z'|\le|z|+|z'|}$

تمارين تطبيقية:

تمرين1 أحسب معيار العدد z في الحالات التالية :

*) $z=(1-i)^3\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100}$

لدينا:

$$|z|=\left|(1-i)^3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}\right|$$
$$=\left|(1-i)^3\right|\left|\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}\right|$$
$$=|1-3|^3\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|^{100}$$
$$=\sqrt{3}^2.1^{100}=2\sqrt{2}$$

*) $z=\dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\times i}{(3-4i)^2}$

$$|z|=\frac{\left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right|\times|i|}{\left|(3-4i)^2\right|}$$
$$=\frac{1^n.1}{25}=\frac{1}{25}$$

تمرين2 ليكن $z\in\mathbb{C}-\left\{\frac{-i}{2}\right\}$

ونعتبر العدد $u=\frac{z+2i}{2z+i}$

بين أن: $|u|=1\Leftrightarrow|z|=1$

لدينا:

$$\begin{aligned}|u|=1 &\Leftrightarrow |u|^2=1\\ &\Leftrightarrow u.\overline{u}=1\\ &\Leftrightarrow \frac{z+2i}{2z+i}.\overline{\frac{z+2i}{2z+i}}=1\\ &\Leftrightarrow \frac{z+2i}{2z+i}.\frac{\overline{z}-2i}{2\overline{z}-i}=1\\ &\Leftrightarrow (z+2i)(\overline{z}-2i)=(2z+i)(2\overline{z}-i)\\ &\Leftrightarrow z\overline{z}-2iz+2i\overline{z}-4=4z\overline{z}-2iz+2i\overline{z}+1\\ &\Leftrightarrow 3z\overline{z}=3\\ &\Leftrightarrow z\overline{z}=1\\ &\Leftrightarrow |z|^2=1\\ &\Leftrightarrow |z|=1\end{aligned}$$

IV- التمثيل الهندسي لعدد عقدي:

نفترض في كل ما يلي أن المستوى منسوب إلى م.م.م.م $(o,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

1- لحق نقطة: affixe d'un point

a) تعريف:

*) لكل نقطة $M(a,b)$ العدد $z=a+ib$ يسمى لحق النقطة M ونكتب: $aff(M)=z$

*) لكل $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ النقطة $M(a,b)$ تسمى صورة z في المستوى العقدي. ونكتب $M(z)$.

أمثلة:

*) صورة العدد $1+i$ هي $A(1,1)$

*) صورة العدد $1-2i$ هي $B(1,-2)$

*) صورة العدد 2 هي $C(2,0)$

*) صورة العدد -2 هي $D(-2,0)$

*) صورة العدد $2i$ هي $E(0,2)$

*) صورة العدد $-3i$ هي $F(0,-3)$

ملاحظة:

المستوى (P) منسوب إلى م $(o,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ يسمى مستوى عقدي.
محور الأفاصيل مكون من صور لأعداد الحقيقية ويسمى محور حقيقي.
محور الأراتيب مكون من صور الأعداد التخيلية صرف ويسمى محور تخيلي.

$$M\in(o,\vec{e}_1)\Leftrightarrow aff(M)\in\mathbb{R}$$
$$M\in(o,\vec{e}_2)\Leftrightarrow aff(M)\in i\mathbb{R}$$

b) خاصيات:

1- التطبيق $f:\mathbb{C}\to P$ تقابل.
$z\to M(z)$
$aff(M)=aff(M')\Leftrightarrow M=M'$

2- لتكن $M(z)$ مع $z=a+ib$
لدينا $\overline{z}=a-ib$ إذن $M'(\overline{z})$ هي مماثلة $M(z)$ بالنسبة لمحور الأفاصيل.
ولدينا $-z=-a-ib$ إذن $M''(-z)$ هي مماثلة $M(z)$ بالنسبة لأصل المعلم.

$$M'=S_{(o,\vec{e}_1)}(M)\Leftrightarrow aff(M'')=\overline{aff(M)}$$
$$M'=S_0(M)\Leftrightarrow qff(M')=-aff(M)$$

3- لتكن M لحقها $z=a+ib$ $M(a,b)$

لدينا:
$$\begin{aligned}OM&=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}\\&=\sqrt{a^2+b^2}=|z|\end{aligned}$$

خاصية

لكل M من P: $OM=|aff(M)|$

تمارين تطبيقية:

1- نعتبر النقطة $A(-3+4i)$. بين أن A تنتمي إلى الدائرة (ξ) التي مركزها o وشعاعها 5.

لدينا:
$$\begin{aligned}OA&=|aff(A)|=|-3+4i|\\&=\left|\sqrt{9+16}\right|=5\end{aligned}$$

إذن: $A\in(\xi)$

2- نعتبر المجموعة: $E=\{M(z)/2|z|=5\}$
حدد طبيعة E و عناصرها المميزة.

$$\begin{aligned}M(z)\in E&\Leftrightarrow 2|z|=5\\&\Leftrightarrow |z|=\frac{5}{2}\\&\Leftrightarrow OM=\frac{5}{2}\\&\Leftrightarrow M\in\xi\left(0,\frac{5}{2}\right)\end{aligned}$$

إذن E هي الدائرة (ξ) التي مركزها o وشعاعها $\frac{5}{2}$.

طريقة (2):
لنحدد معادلة ديكارتية ل E:
نضع $z=x+iy$. إذن:

$$\begin{aligned}M(z)\in E&\Leftrightarrow 2|z|=5\\&\Leftrightarrow |z|=\frac{5}{2}\\&\Leftrightarrow |z|^2=\frac{25}{4}\\&\Leftrightarrow x^2+y^2=\frac{25}{4}\end{aligned}$$

و هذه معادلة دائرة مركزها o وشعاعها $\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$

إذن E على $\xi\left(o,\frac{5}{2}\right)$.

2) لحق متجهة:

a) تعريف:

لكل متجهة $\vec{u}(a,b)$ العدد $z=a+ib$ يسمى لحق المتجهة $\vec{u}$ ونكتب $aff(\vec{u})=z$
ولكل $z=a+ib$ المتجهة $\vec{u}(a,b)$ تسمى صورة العدد z في المستوى المتجهي v_2. نكتب $\vec{u}(z)$.

b) خاصيات:

1- التطبيق $f:\mathbb{C}\to V_2$ تقابل.

$z\to\vec{u}(z)$

$\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow aff(\vec{u})=aff(\vec{v})$

$z=z'\Leftrightarrow\vec{u}(z)=\vec{v}(z')$

2- لتكن $\vec{u}(z)$ و $\vec{v}(z')$

مع $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$

لدينا $\vec{u}(a,b)$ و $\vec{v}(a',b')$ إذن $\vec{u}+\vec{v}(a+a',b+b')$

$$aff(\vec{u}+\vec{v})=a+a'+i(b+b')$$

إذن:
$$=a+ib+a'+ib'$$
$$=z+z'=aff(\vec{u})+aff(\vec{v})$$

ليكن $\alpha\in\mathbb{R}$: $\alpha\vec{u}(\alpha a,\alpha b)$

$$aff(\alpha\vec{u})=\alpha a+\alpha ib=\alpha(a+ib)=\alpha z$$
$$=\alpha aff(\vec{u})$$

خاصية:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من V_2 و α و β من $\mathbb{R}$

لدينا: $aff(\vec{u}+\vec{v})=aff(\vec{u})+aff(\vec{v})$

$aff(\alpha\vec{u})=\alpha aff(\vec{u})$

$aff(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha aff(\vec{u})+\beta aff(\vec{v})$

3- لتكن $\vec{u}(z)$ مع $z=a+ib$ $\vec{u}(a,b)$

لدينا: $\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2}=|z|=|aff(\vec{u})|$

لكل $\vec{u}$ من V_2 لدينا: $\boxed{\|\vec{u}\|=|aff(\vec{u})|}$

4- لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ مع $M(a,b):z=a+ib$

$M'(a',b'):z'=a'+ib'$

$\overrightarrow{MM'}(a'-a,b'-b)$

$aff(\overrightarrow{MM'})=a'-a+i(b'-b)$

$$=a'+ib'-(a+ib)=z'-z=aff(M')-aff(M)$$

ولدينا:
$$MM'=\|\overrightarrow{MM'}\|=|aff(\overrightarrow{MM'})|$$
$$=|aff(M')-aff(M)|$$

خاصية:

لكل M و M' من P:

$aff(\overrightarrow{MM'})=aff(M')-aff(M)$

$MM'=|aff(M')-aff(M)|$

تمارين تطبيقية:

تمرين 1 نعتبر النقط $A(i);B(1+2i);C(3+i);D(2)$

بين أن $ABCD$ متوازي أضلاع.

لنبين أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

لدينا:
$$aff(\overrightarrow{AB})=aff(B)-aff(A)$$
$$=1+2i-i=1+i$$
$$aff(\overrightarrow{DC})=aff(C)-aff(D)$$
$$=3+i-2=1+i$$

إذن $aff(\overrightarrow{AB})=aff(\overrightarrow{DC})$

ومنه: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

وبالتالي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

تمرين 2

نعتبر النقط $A(1)\ ;\ B(j)\ ;\ C(\bar{j})$ مع $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

بين أن ABC متساوي أضلاع.

لدينا: $AB=|aff(B)-aff(A)|$

$$=\left|-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right|=\left|-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$
$$=\sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$$
$$AC=|aff(C)-aff(A)|=\left|-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right|$$
$$=\left|-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$$
$$BC=|aff(C)-aff(B)|=\left|-\frac{1}{2}--i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$
$$=\left|-2i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$$

إذن: $AB=BC=AC$

ومنه ABC متساوي الأضلاع.

5- ليكن z_1 عدد عقدي صورته A_1

ليكن z_2 عدد عقدي صورته A_2

لنحدد صورة z_1+z_2.

لدينا:
$$z_1+z_2=aff(\overrightarrow{OA_1})+aff(\overrightarrow{OA_2})$$
$$=aff(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2})$$

لتكن A النقطة بحيث $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$

(OA_1AA_2 متوازي أضلاع)

إذن $z_1+z_2=aff(\overrightarrow{OA})=aff(A)$

خاصية:

إذا كان z_1 لحق النقطة A_1 و z_2 لحق A_2 فإن: z_1+z_2 هو لحق النقطة A بحيث $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$ أي OA_1AA_2 متوازي أضلاع.

6- ليكن z عدد عقدي صورته A. وليكن $\alpha\in\mathbb{R}$

- لنحدد صورة αz.

لدينا
$$\alpha z=\alpha aff(\overrightarrow{OA})$$
$$=aff(\alpha\overrightarrow{OA})$$

لتكن A' نقطة بحيث $\overrightarrow{OA'}=\alpha\overrightarrow{OA}$

لدينا $\alpha z=aff(\overrightarrow{OA'})=aff(A')$

خاصية:

إذا كان z لحق النقطة M و α عدد حقيقي فإن αz هو لحق M' بحيث $\overrightarrow{OM'}=\alpha\overrightarrow{OM}$

c) تطبيقات:

1- التأويل الهندسي للتطبيق $(a\in\mathbb{C})\ z\to z+a$

نعتبر التطبيق:

$$f:\ P\to P$$
$$M(z)\to M'(z')/z'=z+a$$
مع $a\in\mathbb{C}$

لنحدد طبيعة f

لتكن $M(z)$ نقطة من P و $M'(z')$ صورتها.

لدينا: $z'=z+a$

لدينا: $aff\left(\overrightarrow{MM'}\right)=aff(M')-aff(M)$

$=z+a-z=a$

لتكن $\vec{u}$ لحقها a.

إذن $aff\left(\overrightarrow{MM'}\right)=aff(\vec{u})$

يعني $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

إذن f إزاحة متجهتها $\vec{u}(a)$

خاصية:

ليكن $a\in\mathbb{C}$ التطبيق $f:\ P\to P$

$M(z)\to M'(z')/z'=z+a$

إزاحة متجهتها $\vec{u}$ التي لحقها a

2- لحق منتصف قطعة:

لتكن I منتصف $[AB]$ يعني I مرجح $\{(A,1)(B,1)\}$

لدينا: $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$

إذن: $aff(I)=aff\left(\overrightarrow{OI}\right)=aff\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\right)$

$=\frac{1}{2}\left(aff\left(\overrightarrow{OA}\right)+aff\left(\overrightarrow{OB}\right)\right)$

إذن: $aff(I)=\frac{1}{2}\left(aff(A)+aff(B)\right)$

خاصية:

إذا كان I منتصف $[AB]$ فإن:

$$aff(I)=\frac{1}{2}\left(aff(A)+aff(B)\right)$$

ملاحظة:

إذا كان G مرجح $\{(B,\beta)(A,\alpha)\}$

فإن: $aff(G)=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha aff(A)+\beta aff(B)\right)$

3- شرط استقامية ثلاث نقط:

لتكن A وB وC ألحاقها z_C,z_B,z_A بحيث $A\neq B$

(A وB وC مستقيمة) $\Leftrightarrow(\exists\alpha\in\mathbb{R}):\ \overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow(\exists\alpha\in\mathbb{R}):aff\left(\overrightarrow{AC}\right)=\alpha aff\left(\overrightarrow{AB}\right)$

$\Leftrightarrow(\exists\alpha\in\mathbb{R}):z_C-z_A=\alpha(z_B-z_A)$

$\Leftrightarrow(\exists\alpha\in\mathbb{R}):\alpha=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$

$\Leftrightarrow\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$

خاصية:

لتكن A و B و C 3 نقط ألحاقها z_C,z_B,z_A بحيث $A\neq B$

تكون النقط A و B و C مستقيمة إذا وفقط إذا كان:

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}.$$

تمرين تطبيقي:

نعتبر النقط $A(i)$, $M(z)$, $M'(iz)$ حيث $z\in\mathbb{C}$

حدد مجموعة النقط M التي تكون من أجلها A و M و M' مستقيمية.

V- الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم:

1) عمدة عدد عقدي غير منعدم

تعريف:

ليكن $z\in\mathbb{C}^*$ و M صورة العدد z.

كل قياس للزاوية الموجهة $\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM}\right)$

يسمى عمدة للعدد z.

ملاحظة:

إذا كان α قياسا للزاوية $\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM}\right)$ فإن كل عدد على شكل $\alpha+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ هو قياس ل $\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM}\right)$.

إذن: إذا كان α عمدة ل z فإن كل عدد على شكل: $\alpha+2k\pi$ هو عمدة ل z

نكتب: $\arg(z)=\alpha+2k\pi$ أو $\arg(z)=\alpha[2\pi]$

أمثلة:

حدد عمدة لكل من الأعداد: $1+3i;1-i;1+i;-2i;3i;-3;2$

لتكن G,F,E,D,C,B,A صور لهذه الأعداد على التوالي:

لدينا:

$$*\arg(2)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OA}\right)[2\pi]\equiv0[2\pi]$$

$$*\arg(-3)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]\equiv\pi[2\pi]$$

$$*\arg(3i)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OC}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$*\arg(-2i)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OD}\right)[2\pi]\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$*\arg(1+i)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OE}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$*\arg(1-i)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OF}\right)[2\pi]\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$*\arg(1+3i)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OG}\right)[2\pi]\equiv\alpha[2\pi]$$

حيث $\tan\alpha=3$.

ملاحظة:

$$\begin{aligned}
&(* \quad z\in\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z)\equiv 0[2\pi]\\
&(* \quad z\in\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z)\equiv \pi[2\pi]\\
&(* \quad z\in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z)\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]\\
&(* \quad z\in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z)\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]\\
&(* \quad z\in\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \arg(z)\equiv k\pi(k\in\mathbb{Z})\\
&(* \quad z\in\mathbb{R}^- \Leftrightarrow \arg(z)\equiv \frac{\pi}{2}+k\pi
\end{aligned}$$

2) الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم:

تعريف:

ليكن $z\in\mathbb{C}$. لتكن θ عمدة و r معياره: $|z|=r$

$\arg(z)\equiv\theta[2\pi]$

لتكن M صورة z.

لدينا $OM=|aff(M)|=|z|=r$

لدينا أحداثيات M :

$M(r\cos\theta, r\sin\theta)$

إذن $aff(M)=r\cos\theta+ir\sin\theta$

$aff(M)=z$

إذن $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

خاصية وتعريف:

كل عدد عقدي غير منعدم z يكتب بطريقة وحيدة على شكل $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث $|z|=r$ و $\theta\equiv\arg(z)[2\pi]$
و هذه الكتابة تسمى الشكل المثلثي للعدد z . ونكتب $z=[r,\theta]$

ملاحظة:

*) $z=0$ ليست له لا عمدة و لا شكل مثلثي.

*) إذا كان $z=[r,\theta]$ و M صورة z فإن (r,θ) يسمى زوج الأحداثيات القطبية ل M.

*) $[r,\theta]=[r',\theta']\Leftrightarrow\begin{cases}r=r'\\ \theta\equiv\theta'[2\pi]\end{cases}$

يعني: $z=z'\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=|z'|\\ \arg(z)=\arg(z')[2\pi]\end{cases}$

*) ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}^*$ للحصول على ش المثلثي ل z نتبع ما يلي

$$z=a+ib=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

ولدينا $\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=1$

إذن يوجد α بحيث: $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

إذن: $z=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

خاصية:

$z=a+ib$ من $\mathbb{C}^*$ الشكل المثلثي ل z هو $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$
حيث $r=\sqrt{a^2+b^2}$ و $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

تمارين تطبيقية

تمرين1

حدد الشكل المثلثي للأعداد التالية:

*) $z=5$ لدينا $|z|=5$ و $\arg(z)\equiv 0[2\pi]$

إذن $z=[5,0]$

*) $z=-3$

$|z|=3, \arg(z)\equiv\pi[2\pi]$ إذن $z=[3,\pi]$

*) $z=2i$

$|z|=2, \arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ إذن $z=\left[2,\frac{\pi}{2}\right]$

*) $z=-3i$

$|z|=3; \arg(z)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ إذن $z=\left[3,-\frac{\pi}{2}\right]$

*) $z=1+i\sqrt{3}$

$|z|=2$

$$\begin{aligned}
z&=1+i\sqrt{3}\\
&=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\
z&=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]
\end{aligned}$$

*) $z=\sqrt{3}-i$; $|z|=2$

لدينا:

$$\begin{aligned}
z&=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)\\
&=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\
&=2\left(\cos-\frac{\pi}{6}+i\sin-\frac{\pi}{6}\right)\\
z&=\left[2,-\frac{\pi}{6}\right]
\end{aligned}$$

*) $z=-\sqrt{2}+\sqrt{6}i$

$$\begin{aligned}
z&=2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}i\right)\\
&=2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\
&=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)\\
z&=\left[2\sqrt{2},\frac{2\pi}{3}\right]
\end{aligned}$$

*) $z=-\sqrt{6}-i\sqrt{2}$ $\qquad |z|=2\sqrt{2}$

$$z=2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)$$
$$=2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$$
$$=2\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

إذن: $\qquad z=\left[2\sqrt{2},\frac{7\pi}{6}\right]$

*) $z=\sin\alpha+i\cos\alpha$ حيث $\qquad \alpha\in\mathbb{R}$

لدينا $|z|=1$

$$z=\sin\alpha+i\cos\alpha$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$z=\left[1,\frac{\pi}{2}-\alpha\right]$$

*) $z=-\sin\alpha-i\cos\alpha$ لدينا $\qquad |z|=1$

$$z=-\sin\alpha-i\cos\alpha$$
$$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$$

إذن: $\qquad z=\left[1,\frac{3\pi}{2}-\alpha\right]$

*) $z=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ مع $\alpha\in\mathbb{R},a\in\mathbb{R}^*$

لدينا $\qquad |z|=|a|$

إذا كان $a\rangle 0$ فإن $|z|=a$

ولدينا $z=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

إذن $\qquad z=[a,\alpha]$

إذا كان $a\langle 0$ فإن $|z|=-a$

$$z=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$
$$=-a(-\cos\alpha-i\sin\alpha)$$
$$=-a(\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha))$$

إذن: $\qquad z=[-a,\pi+\alpha]$

ملاحظة:

إذا كان: $z=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ مع $a\rangle 0$ فإن $z=[a,\alpha]$

تمرين 2

$z=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$ مع $\alpha\in[0,2\pi]$

حدد معيار وعمدة z

$$z=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$$
$$=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

لدينا $\qquad |z|=\left|2\cos\frac{\alpha}{2}\right|$

– لندرس إشارة $\cos\frac{\alpha}{2}$ في $[0,2\pi]$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=0\Leftrightarrow\cos\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$
$$\Leftrightarrow\alpha=\pi+2k\pi$$

ولدينا $\alpha\in[0,2\pi]$ إذن: $\quad \alpha=\pi$.

– إذا كان $\alpha\in[0,\pi[$ فإن $\cos\frac{\alpha}{2}\rangle 0$ إذن $\quad |z|=2\cos\frac{\alpha}{2}$

إذن $\qquad z=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

ومنه $\qquad z=\left[2\cos\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right]$

$$|z|=2\cos\frac{\alpha}{2} \text{ و } \arg(\ )\equiv\frac{\alpha}{2}[2\pi]$$

– إذا كان $\alpha\in]\pi,2\pi]$ فإن $\cos\frac{\alpha}{2}\langle 0$ إذن $\quad |z|=-2\cos\frac{\alpha}{2}$

$$z=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=-2\cos\frac{\alpha}{2}\left(-\cos\frac{\alpha}{2}-i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=-2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$
$$z=\left[-2\cos\frac{\alpha}{2},\pi+\frac{\alpha}{2}\right]$$

إذن $\quad \arg(z)\equiv\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)[2\pi]$ و $|z|=2\cos\frac{\alpha}{2}$

– إذا كان $\alpha=\pi$ فإن $|z|=0$ يعني $z=0$

إذن z ليس له عمدة.

3) عمدة العدد $\overline{z}$ و $-z$

ليكن $z=[r,\theta]$

* لدينا: $\qquad \overline{z}=\overline{[r,\theta]}=\overline{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$

$$=r(\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$=r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$$

إذن $\qquad \overline{z}[r,-\theta]$

$$\arg(\overline{z})=-\theta[2\pi]$$
$$=-ar(z)[2\pi]$$

* ولدينا: $\qquad -z=-r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$=r(-\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$=r(\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta))$$
$$-z=[r,\pi+\theta]$$
$$\arg(-z)=\arg(z)+\pi[2\pi]$$

خاصية:

*) $\overline{[r,\theta]}=[r,-\theta]$; $\arg(\overline{z})=-\arg(z)[2\pi]$

*) $-[r,\theta]=[r,\pi+\theta]$; $\arg(-z)=\arg(z)+\pi[2\pi]$

4) العمدة و العمليات في $\mathbb{C}$

a) الجداء:

ليكن $z=[r,\theta]$ و $z'=[r',\theta']$

$$zz'=r(\cos\theta+i\sin\theta)r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$$
$$=rr'\left[(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\cos\theta\sin\theta'+\sin\theta\cos\theta')\right]$$
$$=rr'\left(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\right)$$

إذن $zz'=[rr',\theta+\theta']$

$$\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$$

خاصية:

*) $[r,\theta]\times[r',\theta']=[rr',\theta+\theta']$

*) $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$

ملاحظة:

*) $\prod_{i=1}^{n}[r_i,\theta_i]=\left[\prod_{i=1}^{n}r_i,\sum_{i=1}^{n}\theta_i\right]$

*) $\arg\left(\prod_{i=1}^{n}z_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\arg(z_i)[2\pi]$

*) $(n\in\mathbb{N})\ [r,\theta]^n=[r^n,n\theta]$

*) $(n\in IN)\quad \arg(z^n)=n\arg(z)\ [2\pi]$

b) المقلوب: ليكن $z=[r,\theta]$

$$\frac{1}{[r,\theta]}=\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{1}{r}\left(\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{1}\right)$$
$$=\frac{1}{r}\left(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right)=\left[\frac{1}{r},-\theta\right]=\frac{1}{z}$$
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg(z)[2\pi]$$

خاصية:

*) $\frac{1}{[r,\theta]}=\left[\frac{1}{r},-\theta\right]$

*) $\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg(z)[2\pi]$

ملاحظة: $(n\in\mathbb{N})$

$$[r,\theta]^{-n}=\frac{1}{[r,\theta]^n}=\frac{1}{[r^n,n\theta]}=\left[\frac{1}{r^n},-n\theta\right]$$

إذن $[r,\theta]^{-n}=[r^{-n},-n\theta]$

$$\arg(z^{-n})\equiv-n\arg(z)[2\pi]$$

إذن:

$(\forall n\in\mathbb{Z})\ [r,\theta]^n=[r^n,n\theta]$

$\arg(z^n)\equiv n\arg(z)[2\pi]$

c) الخارج:

$$\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']}=[r,\theta]\times\frac{1}{[r',\theta']}$$
$$=[r,\theta].\left[\frac{1}{r'},-\theta'\right]=\left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg\left(z\times\frac{1}{z'}\right)[2\pi]$$
$$\equiv\arg(z)+\arg\left(\frac{1}{z'}\right)[2\pi]$$
$$\equiv\arg(z)-\arg(z')[2\pi]$$

خاصية:

$\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']}=\left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg(z)-\arg(z')[2\pi]$

تمارين تطبيقية:

تمرين1

حدد الشكل المثلثي ل z في الحالات التالية:

$$z=2i\frac{(1-i)^4(\sqrt{3}+i)}{5(\sqrt{3}-3i)^2}$$

لدينا:

$$*\ 2i=\left[2,\frac{\pi}{2}\right]$$
$$1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos-\frac{\pi}{4}+i\sin-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$*\ 1-i=\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]$$
$$\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$*\ \sqrt{3}+i=\left[2,\frac{\pi}{6}\right]$$
$$*\ 5=[5,0]$$
$$*\ \sqrt{3}-3i=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos-\frac{\pi}{3}+i\sin-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\sqrt{3}-3i=\left[2\sqrt{3},-\frac{\pi}{3}\right]$$

إذن:

$$z=\frac{\left[2,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]^n\times\left[2,\frac{\pi}{6}\right]}{[5,0]\times\left[2\sqrt{3},-\frac{\pi}{3}\right]^2}=\frac{\left[2,\frac{\pi}{2}\right]\times[4,-\pi]\times\left[2,\frac{\pi}{6}\right]}{[5,0]\times\left[12,-2\frac{\pi}{3}\right]}$$
$$=\frac{\left[16,-\frac{\pi}{3}\right]}{\left[60,-2\frac{\pi}{3}\right]}=\left[\frac{16}{60},\frac{\pi}{3}\right]$$

تمرين2

ليكن $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=1+i$, $z=\frac{z_1}{z_2}$

– حدد الشكل المثلثي لكل من z_1 و z_2

- استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

لدينا $z_1=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_1=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$$

$$z_2=1+i=\sqrt{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\left[2,\frac{\pi}{3}\right]}{\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]}=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{12}\right]$$

*) لدينا: $z=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{12}\right]$

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\quad(1)$$

ولدينا $z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{2}$

$$=\frac{1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)=z\quad(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن:

$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{4\sqrt{3}}{2}\\ \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{cases}$$

أي $\begin{cases}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$ يعني $\begin{cases}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}$

ملاحظة: $[r,\alpha]=[r,\alpha+2k\pi]$

تمرين

نعتبر العدد $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) أحسب z^{2000}

2) حدد قيم العدد النسبي n التي يكون من أجلها $z^n\in IR$

3) حدد حسب قيم العدد الطبيعي n z^n .

5) زاوية متجهتين:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين لحقاهما على التوالي $z_{\vec{u}}$ و $z_{\vec{v}}$

لتكن A و B النقطتين بحيث $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$

$$aff(A)=aff\left(\overrightarrow{OA}\right)=aff(\vec{u})=z_{\vec{u}}$$

$$aff(B)=aff\left(\overrightarrow{OB}\right)=aff(\vec{v})=z_{\vec{v}}$$

لدينا:

$$\begin{aligned}\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right)&\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]\\&\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OA},\vec{e}_1}\right)+\left(\overline{\vec{e}_1,\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]\\&\equiv\left(\overline{\vec{e}_1,\overrightarrow{OB}}\right)-\left(\overline{\vec{e}_1,\overrightarrow{OA}}\right)[2\pi]\\&\equiv\arg\left(aff(B)\right)-\arg\left(aff(A)\right)[2\pi]\\&\equiv\arg\left(z_{\vec{v}}\right)-\arg\left(z_{\vec{u}}\right)[2\pi]\\&\equiv\arg\left(aff(\vec{v})\right)-\arg\left(aff(\vec{u})\right)[2\pi]\end{aligned}$$

خاصية:

$$\boxed{\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right)\equiv\arg\left(aff(\vec{v})\right)-\arg\left(aff(\vec{u})\right)[2\pi]}$$

حالات خاصية:

*) $\left(\overline{\vec{e}_1,\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\arg\left(aff\left(\overrightarrow{AB}\right)\right)-\arg(1)[2\pi]$

$$\equiv\arg\left(aff(B)-aff(A)\right)$$

$$\equiv\arg\left(z_B-z_A\right)[2\pi]$$

$$\boxed{\left(\overline{\vec{e}_1,\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\arg\left(z_B-z_A\right)[2\pi]}$$

*) $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)\equiv\arg\left(aff\left(\overrightarrow{CD}\right)\right)-\arg\left(aff\left(\overrightarrow{AB}\right)\right)[2\pi]$

$$\equiv\arg\left(z_D-z_C\right)-\arg\left(z_B-z_A\right)[2\pi]$$

$$\boxed{\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)[2\pi]}$$

تمارين تطبيقي:

تمرين1

نعتبر النقط $A(i),B(z_1),C(z_2)$ حيث z_1 و z_2 من $\mathbb{C}$ يحققان: $z_2=iz_1+i+1$.

بين أن المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A .

لدينا: $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$

ولدينا:

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{iz_1+i+1-i}{z_1-i}=\frac{iz_1+1}{z_1-i}=\frac{i\left(z_1-i\right)}{z_1-i}=i=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]$$

ومنه:

$$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv\arg(i)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

وبالتالي: $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

إذن ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A .

تمرين2

حدد وانشئ المجموعة

$$E=\left\{M(z)\ /\ \arg(z-i)^2\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\right\}$$

6) صيغة موافر وتطبيقاتها:

ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{Z}$ $\quad [1,\theta]^n=[1,n\theta]$

يعني: $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

خاصية:

$$\boxed{\begin{gathered}(\forall\theta\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{Z})\\ (\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\end{gathered}}$$

تطبيقات:

حساب $\cos(nx)$ و $\sin(nx)$ بدلالة $\cos x$ و $\sin x$

– لدينا: $(\cos nx+i\sin nx)=(\cos x+i\sin x)^n$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\cos x)^k.(i\sin x)^{n-k}$$

ومنه:

$$\boxed{\begin{gathered}\cos(nx)=R\acute{e}\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\cos x)^k.(i\sin x)^{n-k}\right]\\ \sin(nx)=\mathrm{Im}\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\cos x)^k.(i\sin x)^{n-k}\right]\end{gathered}}$$

مثال:

احسب $\cos 5x$ و $\sin 5x$ بدلالة $\cos x$ و $\sin x$

$$\cos 5x+i\sin 5x=(\cos x+i\sin)^5$$
$$=\cos^5 x+5\cos^4(i\sin x)+10\cos^3 x(i\sin x)^2$$
$$+10\cos^2 x(i\sin x)^3+5\cos(i\sin x)^4+(i\sin x)^5$$
$$=\cos^5 x+5\cos^4 x(i\sin x)-10\cos^3 x\sin^2 x$$
$$-10i\cos^2 x\sin^3 x+5\cos x\sin^4 x+i\sin^5 x$$
$$=\left(\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x\right)$$
$$+i\left(5\cos^4 x\sin x-10\cos^2 x\sin^3 x+\sin^5 x\right)$$

ومنه:

$$\cos 5x=\left(\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x\right)$$
$$\sin 5x=\left(5\cos^4 x\sin x-10\cos^2 x\sin^3 x+\sin^5 x\right)$$

7) الترميز الأسي لعدد عقدي:

a) الترميز:

نرمز للعدد $[1,\theta]$ بالرمز: $e^{i\theta}$

$$e^{i\theta}=[1,\theta]=\cos\theta+i\sin\theta$$

ملاحظة:

$$[r,\theta]=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$$

$$\boxed{[r,\theta]=re^{i\theta}}$$

أمثلة:

*) $e^{i\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

*) $e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$

*) $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

*) $\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) خاصيات:

(* $e^{i\theta}.e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$

(* $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$

(* $\dfrac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$

(* $(\forall n\in\mathbb{Z})\ \left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$

(* $\left(\overline{e^{i\theta}}\right)=e^{-i\theta}$

(* $-e^{i\theta}=e^{i\pi}.e^{i\theta}=e^{i(\pi+\theta)}$

8) صيغتا أولير Euler:

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $\quad (1)\ e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$$e^{-ix}=\cos(-x)+i\sin(-x)$$
$$(2)\ e^{-ix}=\cos x-i\sin x$$

من $(1)+(2)$ نستنتج أن:

$$2\cos x=e^{ix}+e^{-ix}$$

إذن $\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$

ومن $(1)-(2)$ نستنتج أن:

$$2i\sin x=e^{ix}-e^{-ix}$$

إذن $\sin x=\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$

خاصية:

$$\boxed{\begin{gathered}\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\\ \sin x=\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\end{gathered}}$$

ملاحظة:

$$\boxed{\begin{gathered}e^{ix}+e^{-ix}=2\cos x\\ e^{ix}-e^{-ix}=2i\sin x\end{gathered}}$$

تطبيق: اخطاط حدودية مثلثية:

يعني كتابتها بدلالة $\cos x$ و $\sin x$.

تمرين:

اخطط الحدودية: $P(x)=\cos^3 x\sin^3 x$

نعلم أن
$$\begin{cases}\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\\ \sin x=\frac{1}{2i}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\end{cases}$$

إذن:

$$P(x)=\frac{1}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^{3}\times\left(\frac{-1}{4}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^{2}\right)$$
$$=\frac{-1}{32}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^{2}$$
$$=\frac{-1}{32}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)^{2}$$
$$=\frac{-1}{32}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{4ix}+e^{-4ix}-2\right)$$
$$=\frac{-1}{32}\left(e^{i5x}+e^{-3ix}-2e^{ix}+e^{3ix}+e^{-5ix}+-2e^{-ix}\right)$$
$$=\frac{-1}{32}\left[\left(e^{i5x}+e^{-i5x}\right)+\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)-2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right]$$
$$=\frac{-1}{32}\left(2\cos(5x)+2\cos(3x)-4\cos(x)\right)$$

إذن $P(x)=\frac{-1}{16}\left(\cos(5x)+\cos(3x)-2\cos(x)\right)$

ملاحظة: طريقة البحث عن الشكل المثلثي لمجموع عددين لعقديين لهما نفس المعيار:

طريق1

$$e^{i\alpha}+e^{i\beta}=(\cos\alpha+\cos\beta)+i\,(\sin\alpha+\sin\beta)$$
$$=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})+i\,2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$
$$=2\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})\left[\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})+i\,\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\right]$$

$$e^{i\alpha}-e^{i\beta}=(\cos\alpha-\cos\beta)+i\,(\sin\alpha-\sin\beta)$$
$$=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})+i\,2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$
$$=2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\left[-\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})+i\,\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\right]$$

طريقة2

*) $e^{i\alpha}+e^{i\beta}=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$
$$=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\times 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

*) $e^{i\alpha}-e^{i\beta}=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}-e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$
$$=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\times 2i\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.e^{i\frac{\pi}{2}}.e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$
$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.e^{i\left(\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}\right)}$$
$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}\right)$$

VI- الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم:

1) تعريف:

ليكن z من $\mathbb{C}$ و $n\in\mathbb{N}^{*}-\{1\}$
نسمي الجذر النوني أو الجذر من الرتبة n للعدد z كل عدد عقدي z يحقق $z^{n}=Z$

أمثلة:

*) $i^{2}=-1$, $(i)^{2}=1$
كل من i و $-i$ جذر من الرتبة 2 للعدد -1.
*) $(-i)^{4}=1\,,\,i^{4}=1\,,\,(-1)^{4}=1\,,\,1^{4}=1$
الأعداد $-i,i,-1,1$ جذور من الرتبة 4 للعدد 1.

2) تحديد الجذور من الرتبة n.

ليكن: $z=re^{i\theta}$ مع $r\rangle 0$
نضع $z=ee^{iq}$ مع $q\rangle 0$
لدينا: $z^{n}=Z\Leftrightarrow e^{n}e^{in\ell}=re^{i\theta}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}e^{n}=r\\ n\ell\equiv\theta[2\pi]\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}e=\sqrt[n]{r}\\ \ell\equiv\frac{\theta}{n}\left[\frac{2\pi}{n}\right]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ell=\sqrt[n]{r}\\ \ell=\frac{\theta}{n}+\frac{2k}{n}(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\ell=\sqrt[n]{r}\\ \ell\equiv\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}[2\pi]/k\in\{0,1,2,...,(n-1)\}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow z=\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}/k\in\{0,1,2,...,(n-1)\}$$

إذن هناك n جذر نوني.

خاصية:

ليكن $Z=re^{i\theta}$ (مع $r\rangle 0$) و $n\in\mathbb{N}^{*}-\{1\}$
العدد Z يقبل n جذر نوني. وهذه الجذور النونية هي الأعداد:
$$z_{k}=\sqrt[n]{r}.e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}/k\in\{0,1,2,...,(n-1)\}$$

مثال:

لنحدد الجذور من الرتبة 3 للعدد $Z=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$
– لنحدد الشكل المثلثي ل Z

لدينا: $Z=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$
$$=2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

إذن: $Z=2e^{i\frac{5\pi}{4}}$
إذن الجذور من الرتبة 3 ل Z هي الأعداد:

$$z_k = \sqrt[3]{2}.e^{i\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)} \quad k \in \{0,1,2\}$$

$$z_0 = \sqrt[3]{2}.e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2}.e^{i\frac{3\pi}{12}}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}.e^{i\frac{21\pi}{12}} = \sqrt[3]{2}.e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

3) صور الجذور النونية:

ليكن $Z = re^{i\theta}$ $(r \rangle 0)$

الجذور النونية ل Z هي الأعداد

$$z_k = \sqrt[n]{r}.e^{i\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}} \;/\; k \in \{0,1,2,...,(n-1)\}$$

لتكن $M_0, M_1, ..., M_{n-1}$ صور $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$ على التوالي

$$OM_k = |aff(M_k)| = |z_k| = \sqrt[n]{r}$$

إذن النقط M_k تنتمي إلى الدائرة ζ التي مركزها o وشعاعها $\sqrt[n]{r}$

ولدينا:

$$\left(\overline{OM_k}, \overline{OM_{k+1}}\right) \equiv \arg(z_{k+1}) - \arg(z_k)[2\pi]$$

$$\equiv \frac{\theta}{n} + \frac{2(k+1)\pi}{n} - \frac{\theta}{n} - \frac{2k\pi}{n}[2\pi]$$

$$\equiv \frac{2\pi}{n}[2\pi]$$

إذن الزاوية $\left(\overline{OM_k}, \overline{OM_{k+1}}\right)$ ثابتة.

إذن النقط M_k تكون مضلعا منتظما.

خاصية:

ليكن $Z = re^{i\theta}$ $(r \rangle 0)$

صور الجذور النونية للعدد Z تكون مضلعا منتظما ذو n ضلع محاط بالدائرة التي مركزها o وشعاعها $\sqrt[n]{r}$.

4) الجذور من الرتبة n للوحدة: unité

a) تحديد الجذور من الرتبة n للوحدة

ليكن $z = 1$

لدينا $z = e^{io}$

إذن الجذور من الرتبة n ل 1 هي الأعداد:

$$w_k = \sqrt[n]{1}\, e^{i\frac{o}{n}+\frac{2k\pi}{n}}$$

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \;/\; k \in \{0,1,...,(n-1)\}$$

خاصية:

الجذور من الرتبة n للعدد 1 (للوحدة) هي الأعداد:

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \;/\; k \in \{0,1,...,(n-1)\}$$

أمثلة:

1) الجذور المربعة للعدد 1 هي الأعداد:

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{2}} = e^{ik\pi} \;/\; k \in \{0,1\}$$

هذان الجذران هما:

$$w_0 = e^{io} = 1$$

$$w_1 = e^{i\pi} = -1$$

2) الجذور من الرتبة 3 للوحدة هي الأعداد:

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}} \;/\; k \in \{0,1,2\}$$

هذه الجذور هي:

$$w_0 = e^{io} = 1$$

$$w_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$w_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j \qquad j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن **الجذور المكعبة ل 1 هي $\bar{j}, j, 1$**

ملاحظة:

*) $j^3 = 1$; $j^2 = \bar{j}$

*) $1 + j + \bar{j} = 0$ إذن $1 + j + j^2 = 0$

*) $j^2 = -1 - j$

3) الجذور من الرتبة 4 ل 1:

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{4}} = e^{i\frac{k\pi}{2}} \;/\; k \in \{0,1,2,3\}$$

هذه الجذور هي:

$$w_0 = e^{io} = 1$$

$$w_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$w_2 = e^{i\pi} = -1$$

$$w_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{i-\frac{\pi}{2}} = -i$$

إذن **الجذور من الرتبة 4 ل 1 هي: $-i, i, -1, 1$**

b) خاصيات:

1− لتكن w_k الجذور من الرتبة n ل 1:

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

لدينا:

$$= \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = w_1^k$$

خاصية

لتكن w_k الجذور النونية لـ 1:

$\forall k \in \{0,1,...,(n-1)\}$ $w_k = w_1^k$ مع $w_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

إذن الجذور من الرتبة n لـ 1 هي: $1, w_1, w_1^2, w_1^3, ..., w_1^{n-1}$

2- لتكن w_k الجذور النونية ل 1:

$$w_0+w_1+w_2+...+w_{n-1}=1+w_1+w_1^2+...+w_1^{n-1}$$
$$=\frac{(1-w_1)(1+w_1+w_1^2+...+w_1^{n-1})}{(1-w_1)}$$
$$=\frac{1-w_1^n}{1-w_1}=\frac{1-1}{1-w_1}=0$$

($w_1^n=1$, w_1 جذر نوني ل 1.)

خاصية

$\boxed{\text{مجموع الجذور النونية للعدد 1 منعدم.}}$

ملاحظة:

*) إذا كان w جذر نوني للعدد 1 فإن كل من $\bar{w}$ و $\frac{1}{w}$ جذر نوني للعدد 1.

*) إذا كان w و w' جذرين نونيين للعدد 1 فإن كل من ww' و $\frac{w}{w'}$ جذر نوني للعدد 1.

c) العلاقة بين الجذور النونية ل 1 و الجذور النونية لعدد من $\mathbb{C}^*$

ليكن Z من $\mathbb{C}^*$

نفترض أن $a\neq 0$ جذر نوني ل Z $\left(a^n=Z\right)$

– لتحديد الجذور الأخرى:

$$z^n=Z\Leftrightarrow z^n=a^n$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{z}{a}\right)^n=1$$

هذا يعني أن $\frac{z}{a}$ جذر نوني ل 1

يعني: $\frac{z}{a}=w_k\ /\ k\in\{0,1,...,(n-1)\}$

يعني: $z=aw_k\ /\ k\in\{0,1,...,(n-1)\}$

خاصية:

ليكن Z من $\mathbb{C}^*$ و a جذر نوني ل Z
نحصل على الجذور النونية ل Z بضرب a في الجذور النونية للوحدة 1.

مثال:

أحسب $(1+2i)^3$ و استنتج الجذور من الرتبة 3 للعدد $Z=-1+2i$

لدينا:

$$(1+2i)^3=(1+2i)^2(1+2i)$$
$$=(1+4i-4)(1+2i)=1+2i+4i-8-4-8i$$
$$=-11-2i$$

– لدينا $(1+2i)^3=Z$

إذن $1+2i$ جذر من الرتبة 3 ل Z

ونعلم أن الجذور من الرتبة 3 ل 1 هي: $1, j, \bar{j}$

– إذن الجذور من الرتبة 3 ل Z هي:

$$z_0=1(1+2i)=1+2i$$
$$z_1=j(1+2i)=\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+2i)$$
$$z_2=\bar{j}(1+2i)$$

5) الجذور المربعة لعدد من $\mathbb{C}^*$

a) الطريقة المثلثية:

ليكن $Z=re^{i\theta}$ $(r>0)$

لنحدد الجذرين المربعين ل Z.

$$z^2=Z\Leftrightarrow z^2=re^{i\theta}$$
$$\Leftrightarrow z^2=\left(\sqrt{r}\right)^2\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases} z=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}} \\ z=-\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}} \end{cases}$$

إذن $\boxed{\text{الجذران المربعان ل } Z \text{ هما: } \sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ و } -\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}}$

b) الطريقة الجبرية:

1) إذا كان $Z=a\in\mathbb{R}_+^*$

لدينا: $Z=a=\left(\sqrt{a}\right)^2$

إذن $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ هما الجذران المربعان للعدد Z:

2) إذا كان $Z=-a\left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)$

$$Z=-a=i^2\left(\sqrt{a}\right)^2=\left(i\sqrt{a}\right)^2$$

إذن جذرا Z هما: $i\sqrt{a}$ و $-i\sqrt{a}$

3- إذا كان $Z=ib\left(b\in\mathbb{R}_+^*\right)$

$$Z=ib=2i.\frac{b}{2}=(1+i)^2\left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2$$
$$=\left((1+i)\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2$$

إذن جذرا Z هما $z=(1+i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ و $-z$

4) إذا كان $Z=-ib\left(b\in\mathbb{R}_+^*\right)$

$$Z=-ib=-2i.\frac{b}{2}=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2(1-i)^2$$
$$=\left((1-i)\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2$$

إذن جذرا Z هما $z=(1-i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ و $-z$

5) إذا كان $\boxed{Z=a+ib}$ مع $(a\neq 0$ و $b\neq 0)$

مثال:

لنحدد الجذرين المربعين للعدد:

$$Z=-3+4i$$

نضع $z=x+iy$ (مع x و y من $\mathbb{R}$)

$z^2=x^2-y^2+2ixy$ و $|z|^2=x^2+y^2$

$$z^2=Z \Leftrightarrow \begin{cases} z^2=Z \\ |z|^2=|Z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-3 & (1) \\ 2xy=4 & (2) \\ x^2+y^2=5 & (3) \end{cases}$$

من $(1)+(3)$ نستنتج أن $2x^2=2$ يعني $x=1$ أو $x=-1$

ومن $(1)-(3)$ نستنتج أن $2y^2=8$

يعني $y^2=4$

أي $y=2$ أو $y=-2$

ومن خلال (2) لدينا $xy=2\rangle 0$ إذن x و y لهما نفس الإشارة

إذن $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

إذن جذرا Z هما:

$z=1+2i$ و $-z$

VII) المعادلات من الدرجة II:

نعتبر المعادلة $az^2+bz+c=0$ مع $a\neq 0$

لدينا: $(E): az^2+bz+c=0$

$$\Leftrightarrow a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

نضع $\Delta=b^2-4ac$

$$(E)\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$$

*) إذا كان $\Delta=0$ فإن:

$$(E)\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \Leftrightarrow z=-\frac{b}{2a}$$

إذن: $S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

*) إذا كان $\Delta\neq 0$ فإن Δ يقبل جذرين مربعين u و $-u$

إذن:

$$(E)\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{u^2}{4a^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}+\frac{u}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{u}{2a}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-b-u}{2a} \quad \text{أو} \quad z=\frac{-b+u}{2a}$$

خاصية:

نعتبر المعادلة $az^2+bz+c=0$ مع $a\neq 0$

نضع $\Delta=b^2-4ac$

1- إذا كان $\Delta=0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا: $z=-\frac{b}{2a}$.

2- إذا كان $\Delta\neq 0$ فإن Δ يقبل جذرين مربعين u و $-u$

يكون للمعادلة حلان: $z=\frac{-b+u}{2a}$ و $z=\frac{-b-u}{2a}$.

ملاحظات:

*) نعتبر المعادلة $az^2+bz+c=0$ مع $a\neq 0$

إذا كان z_1 و z_2 حلي المعادلة فإن:

$$\begin{cases} z_1+z_2=\frac{-b}{a} \\ z_1z_2=\frac{c}{a} \end{cases}$$

*) نعتبر المعادلة $az^2+2b'z+c=0$ مع $a\neq 0$

من أجل حل المعادلة نستعمل المميز المختصر

$$\Delta'=b'-ac$$

1- إذا كان $\boxed{\Delta'=0}$ المعادلة لها حل وحيد $z=-\frac{b'}{a}$

2- إذا كان $\boxed{\Delta'\neq 0}$ المعادلة لها حلان:

$z_1=\frac{-b'+u}{2a}$ و $z_2=\frac{-b'-u}{2a}$. حيث u جذر مربع Δ'.

تمرين تطبيقي:

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية:

1) $z^2+z+1=0$

$$\Delta=1-4=-3=i^2 3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$$

إذن جذرا Δ هما $u=i\sqrt{3}$ و $-u$

إذن:

$$z_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=j$$

$$z_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\bar{j}$$

إذن: $S=\{j,\bar{j}\}$

2) $(2+i)z^2-(3+2i)z+1-\frac{i}{2}=0$

$$\Delta=(3+2i)-4(2+i)\left(1-\frac{i}{2}\right)$$

$$=-5+12i$$

$$=2^2+(3i)^2+2.2.3i$$

$$=(2+3i)^2$$

إذن جذرا Δ هما $u=2+3i$ و $-u$

إذن:

$$z_1=\frac{(3+2i)-(2+3i)}{2(2+i)} \quad ; \quad z_2=\frac{(3+2i)+(2+3i)}{2(2+i)}$$

$$=\frac{1-i}{2(2+i)}=\frac{(1-i)(2-i)}{10} \quad ; \quad =\frac{5+5i}{2(2+i)}=\frac{(5+5i)(2-i)}{10}$$

$$z_1=\frac{1}{10}-\frac{3}{10}i \quad ; \quad z_2=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$$

إذن: $S=\{z_1,z_2\}$

VIII) الدوران في المستوى:

1) التمثيل العقدي للدوران:

ليكن R دوران مركزه $\Omega(g)$ وزاويته θ

لتكن (z M و $M'(z')$ بحيث $M \neq \Omega$

$$R(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z-w| = |z'-w'| \\ \arg\left(\dfrac{z'-w}{z-w}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|z-w|}{|z'-w'|} = 1 \\ \arg(\quad) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z'-w}{z-w} = e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow z'-w = e^{i\theta}(z-w)$$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z-w)+w$$

نلاحظ أن هذه العلاقة تبقى صحيحة كذلك بالنسبة ل Ω.

خاصية:

> ليكن R دوران مركزه $\Omega(w)$ وزاويته θ
> لكل (z M و $M'(z')$ من P لدينا:
> $R(M)=M' \Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z-w)+w$
> الكتابة $z' = e^{i\theta}(z-w)+w$ تسمى التمثيل العقدي ل R.

مثال:

ليكن R دوران مركزه $\Omega(1+i)$ وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$

لنحدد صورة $R(1-i)$

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$. نعلم أن:

$$R(M)=M' \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z + (1+i)\left(1-e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + (1+i)(1-i)$$

$$\Leftrightarrow z' = iz+2$$

لتكن $A'(z')$ صورة $A(1-i)$

لدينا:

$$\begin{aligned} z' &= i(1-i)+2 \\ &= i+3 \end{aligned}$$

إذن $A'(3+i)$

2) التأويل الهندسي للتطبيق $z - az - b$ $(a \neq 1\,;\,|a|=1)$

نعتبر التطبيق $f: \quad P \to P$

$$M(z) \to M'(z') / z' = az+b$$

(مع a و b من $\mathbb{C}$ و $|a|=1$ و $a \neq 1$)

لنبين أن f دوران:

* لنبحث عن النقطة الصامدة:

لتكن $M(z)$:

$$f(M)=M \Leftrightarrow z = az+b$$

$$\Leftrightarrow z(1-a) = b$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{b}{(1-a)}$$

إذن f يقبل نقطة صامدة وحيدة هي $\Omega(w)$ مع $w = \dfrac{b}{1-a}$

* لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ من P بحيث $M \neq \Omega$

$$f(M)=M' \Leftrightarrow z' = az+b$$

ولدينا $\Omega(w)$ صامدة إذن $w = aw+b$

يعني $b = w-aw$

إذن $f(M)=M' \Leftrightarrow z' = az+w-aw$

$$\Leftrightarrow z'-w = a(z-w)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z'-w| = |a(z-w)| \\ \arg(z'-w) \equiv \arg(a(z-w))[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z'-w| = |a||z-w| \\ \arg(z'-w) \equiv \arg(a) + \arg(z-w)[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z'-w| = |z-w| \\ \arg(z'-w) - \arg(z-w) \equiv \arg(a)[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \arg(a)[2\pi] \end{cases}$$

إذن f دوران مركزه Ω وزاويته $\arg(a)$.

خاصية:

> ليكن a و b من $\mathbb{C}$ بحيث $a \neq 1$ و $|a|=1$
> التطبيق: $f: \quad P \to P$
> $M(z) \to M'(z') / z' = az+b$
> دوران مركزه $\Omega(w)$ بحيث $w = \dfrac{b}{1-a}$ وزاويته $\arg(a)$

تمرين تطبيقي:

نعتبر التطبيق $f: \quad P \to P$

$$M(z) \to M'(z') / z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1$$

حدد طبيعة التطبيق f .

* لدينا:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \neq 1 \\ \left|\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1 \end{cases}$$

إذن f دوران مركز $\Omega(w)$ بحيث:

$w = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ أي: $w = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$$w = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وزاويته $\arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\left[1,\frac{\pi}{3}\right]$$

إذن $\arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

وبالتالي f دوران مركزه $\Omega\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ وزاويته $\theta=\frac{\pi}{3}$.