

I- قابلية القسمة في \mathbb{Z}

1) تعريف:

ليكن $b \in \mathbb{Z}$ من \mathbb{Z} . نقول إن b يقسم a إذا وجد عدد k من \mathbb{Z} بحيث $a = kb$. ونكتب b/a .

ملاحظات:

* إذا كان b/a نقول كذلك إن b قاسم ل a مضاعف ل b .
* مجموعة مضاعفات b هي $\{..., -2b, -b, 0, b, 2b, \dots\}$

يعني $\{kb/k \in \mathbb{Z}\}$ ونرمز لها ب: $b\mathbb{Z}$

* $1/a$ ($\forall a \in \mathbb{Z}$) (لأن $a = 1 \cdot a$)

* $-1/a$ ($\forall a \in \mathbb{Z}$) (لأن $a = -1 \cdot (-a)$)

* $a/0$ ($\forall a \in \mathbb{Z}$) (لأن $0 = 0 \cdot a$)

* $0/0$ (لأن مثلا $0 = 0 \times 2$)

* $0 \times a$ ($\forall a \in \mathbb{Z}^*$)

* ليكن $b/a \in \mathbb{Z}^*$ $b \in \mathbb{Z}$ بحيث b/a

لدينا b/a إذن يوجد $k \in \mathbb{Z}$ بحيث $a = kb$

إذن: $|a| = |k||b|$

ولدينا $a \neq 0$ إذن $k \neq 0$ إذن $|k| \in \mathbb{N}^*$

يعني $|k| \geq 1$

إذن $|b||k| \geq |b|$

يعني $|a| \geq |b|$

إذن: $\begin{cases} a \neq 0 \\ b/a \end{cases} \Rightarrow |b| \leq |a|$

* $a/|a|$ ($\forall a \in \mathbb{Z}$)

* $|a/a|$ ($\forall a \in \mathbb{Z}$)

2) خاصيات قابلية القسمة:

1- ليكن $a \in \mathbb{Z}$ لدينا: $a = 1 \cdot a$ إذن a/a

إذن a/a ($\forall a \in \mathbb{Z}$)

نقول إن علاقة قابلية القسمة انعكاسية.

2- ليكن c و b من \mathbb{Z} بحيث a/b

لدينا a/b إذن يوجد k من \mathbb{Z} بحيث $b = ka$

ولدينا b/c إذن يوجد k' من \mathbb{Z} بحيث $c = k'b$

أي $c = k'ka$

إذن a/c

إذن $\begin{cases} a/b \\ b/c \end{cases} \Rightarrow a/c$ ($\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$)

نقول إن العلاقة (\diagup) متعدية.

3- ليكن $b \in \mathbb{Z}$ من \mathbb{Z} بحيث a/b و b/a

لدينا a/b إذن يوجد k من \mathbb{Z} بحيث $b = ak$

و b/a إذن يوجد k' من \mathbb{Z} بحيث $a = bk'$

يعني $a = kk'a$

* إذ كان $a = 0$ فإن $b = 0$ إذن $a = b$

* إذا كان $a \neq 0$ فإن $kk' = 1$

إذن $k/1$ ونعلم أن قواسم 1 هي 1 و -1.

إذن $k = -1$ أو $k = 1$

إذا كان $k = 1$ فإن $k' = 1$

إذا كان $k = -1$ فإن $k' = -1$

إذن $\begin{cases} k = 1 \\ k' = 1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} k = -1 \\ k' = -1 \end{cases}$

إذن $a = b$ أو $a = -b$ إذن $|a| = |b|$

خاصية:

(* العلاقة (\diagup) انعكاسية. يعني a/a ($\forall a \in \mathbb{Z}$)

(* العلاقة (\diagup) متعدية. يعني: $a/b \Rightarrow a/c$ ($\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$)

(* $|a| = |b| \Rightarrow a/b$ ($\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2$)

(* $a = b \Rightarrow a/b$ ($\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2$)

نقول في هذه الحالة إن العلاقة (\diagup) تخالفية.

3) القسمة الأقلدية في \mathbb{Z}

(a) القسمة الأقلدية في \mathbb{N}

مبرهنة:

ليكن $b \in \mathbb{N}^*$ و $a \in \mathbb{N}$

يوجد زوج وحيد $(q,r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ بحيث: $\begin{cases} a = qb + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$

برهان:

ليكن $b \in \mathbb{N}^*$ و $a \in \mathbb{N}$

-1 Existence:

نعتبر المجموعة: $A = \{k \in \mathbb{N} / kb \leq a\}$

* لدينا $0 \in A$ إذن $A \neq \emptyset$

* ليكن $k \in A$ لدينا: $kb \leq a$

ولدينا $b \in \mathbb{N}^*$ يعني $b \geq 1$ أي $kb \geq k$

إذن $k \leq a$

إذن $(\forall k \in A) k \leq a$

إذن A مكبورة ب a .

* ولدينا $A \subset \mathbb{N}$. إذن A تقبل الأكبر عنصر. نضع $q = \text{Max}A$

و $r = a - bq$

* لنبين أن (q,r) يحقق الشرطين:

لدينا $r = a - bq$ إذن $a = b \cdot q + r$

لنبين أن $0 \leq r < b$

لدينا $q = \text{Max}A$ إذن $q \in A$ ومنه $qb \leq a$

يعني $a - qb \geq 0$

إذن $0 \leq r$

لدينا $q = \text{Max}A$ إذن $(q+1) \notin A$

إذن $(q+1)b > a$

يعني $a < bq + b$

أي $a - bq < b$ يعني $r < b$

ومنه $0 \leq r \leq b$

إذن يوجد زوج $(q, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ بحيث: $\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$

L'unicité (2)

نفترض أنه يوجد زوجان (q', r') و (q, r) من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

بحيث $\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$ و $\begin{cases} a = bq' + r' \\ 0 \leq r' < b \end{cases}$

لدينا: $bq + r = bq' + r'$

$$b(q - q') = r' - r$$

إذن: $|b| \cdot |q - q'| = |r' - r|$

ولدينا $\begin{cases} 0 \leq r < b \\ 0 \leq r' < b \end{cases}$ يعني $\begin{cases} -b < -r < 0 \\ 0 \leq r' < b \end{cases}$

إذن: $-b < r' - r < b$

يعني: $|r' - r| < b$

يعني: $|b| |q - q'| < b$

يعني: $|q - q'| < 1$

يعني: $|q - q'| = 0$

ولدينا $|q - q'| \in \mathbb{N}$ إذن $|q - q'| = 0$

يعني $q = q'$

ومنه $|r - r'| = 0$ يعني $r = r'$

إذن $(q, r) = (q', r')$

وبالتالي يوجد زوج وحيد $(q, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ يحقق $\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$

(b) القسمة الأقليدية في \mathbb{Z}

ميرهنة:

ليكن $a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{N}^*$

يوجد زوج وحيد (q, r) من $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$ بحيث: $\begin{cases} a = qb + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$

برهان:

ليكن $a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{N}^*$

Existence (1)

* إذا كان $a \in \mathbb{N}$ فإنه يوجد زوج وحيد يحقق الشرط.

* إذا كان $a \in \mathbb{Z}^*$ فإن $-a \in \mathbb{N}^*$

إذن يوجد زوج وحيد (q', r') من $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ بحيث:

$$\begin{cases} -a = bq' + r' \\ 0 \leq r' < b \end{cases}$$

لدينا $a = b(-q') - r'$

إذا كان $r' = 0$ فإن $a = b(-q)$

نضع $q = -q'$ و $r = 0$

إذا كان $r' \neq 0$

فإن $a = b(-q') - r'$

$$= b(-q') - b + b - r'$$

$$a = b(-q' - 1) + (b - r')$$

نضع $\begin{cases} r = b - r' \\ q = -q' - 1 \end{cases}$ لدينا $a = bq + r$

ولدينا $0 < r < b$

يعني $0 < b - r' < b$ إذن $0 < r < b$

إذن $0 < r < b$

* وبالتالي يوجد زوج (q, r) بحيث: $\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$

L'unicité (2)

بنفس الطريقة السابقة نبين أن الزوج (q, r) وحيد.

(II) الموافقة بتريديد n :

(1) تعريف:

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $b \neq 0$ من \mathbb{Z}

نقول إن a يوافق b بتريديد n إذا وفقط إذا كان

$$a \equiv b[n] \text{ ونكتب } n/a - b$$

ملاحظة:

$$a \equiv b[n] \Leftrightarrow n/a - b$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) a - b = nk$$

$$\Leftrightarrow a = nk + b$$

(2) خاصيات:

1- ليكن $n \in \mathbb{N}$

(* $(\forall a \in \mathbb{Z}) a \equiv a[n]$)

إذن علاقة الموافقة انعكاسية.

(* ليكن $b \neq 0$ من \mathbb{Z} بحيث $a \equiv b[n]$)

إذن $n/a - b$ يعني يوجد k من \mathbb{Z} بحيث: $a - b = nk$

$$\text{إذن } b - a = n(-k)$$

إذن $n/a - b$ ومنه $b \equiv a[n]$

إذن $a \equiv b[n] \Rightarrow b \equiv a[n]$ علاقة الموافقة تماثلية.

(* ليكن $b \neq 0$ من \mathbb{Z} بحيث: $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ b \equiv c[n] \end{cases}$)

لدينا $a \equiv b[n]$ إذن (1) $a - b = kn$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

و $b \equiv c[n]$ إذن (2) $b - c = k'n$ مع $k' \in \mathbb{Z}$.

من (1) + (2) نستنتج $a - c = (k + k')n$ إذن $n/a - c$

$$a \equiv c[n]$$

إذن: $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ b \equiv c[n] \end{cases} \Rightarrow a \equiv c[n]$

علاقة الموافقة متعدية.

خاصية (1):

علاقة الموافقة انعكاسية تماثلية ومتعدية.

نقول إن علاقة الموافقة علاقة تكافؤ.

$$(\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3) * a \equiv a[n]$$

يعني: $* a \equiv b[n] \Rightarrow b \equiv a[n]$

$$* \begin{cases} a \equiv b[n] \\ b \equiv c[n] \end{cases} \Rightarrow a \equiv c[n]$$

خاصية (2):

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

كل عدد a من \mathbb{Z} يوافق بتريديد n باقي قسمته على n يعني إذا

كان r هو باقي قسمة a على n فإن $a \equiv r[n]$.

برهان:

$$\begin{cases} a = nq + r \\ 0 \leq r < n \end{cases} \text{ لدينا}$$

من خلال (1) + (2) نجد:
 $(a+c)-(b+d) = (k+k')n$
 $a+c \equiv b+d [n]$ إذن
 $c(a-b) = ckn$ * لدينا من (1)
 $b(c-d) = bk'n$: (2) ومن
 وجمع الطرفين: $ac-bd = n(ck+bk')$
 إذن: $n/ac-bd$ ومنه $ac \equiv bd [n]$
ملاحظة: ليكن $n \in \mathbb{N}$ و a من \mathbb{Z} .
 $(\forall k \in \mathbb{Z}) a \equiv a+nk [n]$

تمرين تطبيقي:

(1) لنبين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) 7 \mid 3^{2n} - 2^n$

ملاحظة: $n/a \Leftrightarrow a \equiv 0 [n]$

لدينا:

$$3^2 \equiv 9 [7]$$

$$\equiv 9-7 [7]$$

$$\equiv 2 [7]$$

$$\text{إذن } 3^2 \equiv 2 [7]$$

$$\text{إذن } 3^{2n} \equiv 2^n [7]$$

$$\text{إذن } (\forall n \in \mathbb{N}): 7 \mid 3^{2n} - 2^n$$

(2) لنبين أن $17 \mid 3.5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ لكل n من \mathbb{N}^*
 لدينا:

$$5^{2n-1} = 5^{2(n-1)+1}$$

$$= 5^{2(n-1)} \times 5$$

ولدينا :

$$5^2 \equiv 25 [17]$$

$$\equiv 8 [17]$$

$$5^2 \equiv 2^3 [17]$$

$$\text{إذن: } 5^{2(n+1)} \equiv 2^{3(n+1)} [17]$$

$$5.5^{2(n-1)} \equiv 2^{3(n-1)} \times 5 [17] \text{ يعني:}$$

$$5^{2n-1} \equiv 2^{3(n-1)} \times 5 [17] \text{ يعني:}$$

$$3.5^{2n-1} \equiv 2^{3(n-1)} \times 15 [17] \text{ يعني:}$$

$$3.5^{2n-1} + 2^{3n-2} \equiv 2^{3n-3} \times 15 + 2^{3n-2} [17] \text{ يعني:}$$

$$3.5^{2n-1} + 2^{3n-2} \equiv 2^{3n-3} (15+2) [17] \text{ يعني:}$$

$$\equiv 2^{3n-3} (17) [17] \text{ يعني:}$$

$$3.5^{2n-1} + 2^{3n-2} \equiv 0 [17] \text{ إذن:}$$

$$\text{إذن } (\forall n \in \mathbb{N}^*) 17 \mid 3.5^{2n-1} + 2^{3n-2}$$

(3) مجموعة أصناف تكافؤ:

(a) تعريف:

ليكن $a \in \mathbb{N}$ وليكن $x \in \mathbb{Z}$
 نسمي صنف تكافؤ x المجموعة التي نرمز لها بـ \bar{x} أو \bar{x}
 والمعرفة بما يلي:

$$\bar{x} = \{y \in \mathbb{Z} / y \equiv x [n]\}$$

ونرمز لمجموعة هذه الأصناف بـ: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$\text{إذن } a-r = nq$$

$$\text{ومنه } n/a-r \text{ إذن } a \equiv r [n]$$

خاصية (3):

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و b, r من \mathbb{Z} .
 ليكن r باقي قسمة a على n و r' باقي قسمة b على n .
 لدينا: $a \equiv b [n] \Leftrightarrow r = r'$

برهان:

$$\text{لدينا: } \begin{cases} a = nq + r \\ 0 \leq r < n \end{cases} \text{ و } \begin{cases} b = nq' + r' \\ 0 \leq r' < n \end{cases}$$

* نفترض أن $r = r'$

$$\text{نعلم أن } \begin{cases} a \equiv r [n] \\ b \equiv r' [n] \end{cases} \text{ و } \begin{cases} a \equiv r [n] \\ b \equiv r' [n] \end{cases}$$

$$\text{و } r = r' \text{ إذن } a \equiv b [n]$$

* نفترض أن $a \equiv b [n]$ ولنبين أن $r = r'$

$$\text{لدينا } \begin{cases} a \equiv r [n] \\ b \equiv r' [n] \\ r = r' \end{cases} \text{ إذن } r \equiv r' [n]$$

$$\text{أي } r-r' = kn \text{ مع } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن } |r-r'| = |k|n$$

$$\text{ولدينا } \begin{cases} 0 \leq r < n \\ 0 \leq r' < n \end{cases}$$

$$\text{إذن } -n < r-r' < n$$

$$\text{أي } |r-r'| < n$$

$$\text{يعني } |k|n < n$$

$$\text{إذن } |k| < 1$$

$$\text{ولدينا } |k| \in \mathbb{N} \text{ إذن } |k| = 0$$

$$\text{ومنه } r-r' = 0 \text{ إذن } r = r'$$

خاصية (4):

ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$(1) (\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4) \begin{cases} a \equiv b [n] \\ c \equiv d [n] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c \equiv b+d [n] \\ a.c \equiv b.d [n] \end{cases}$$

(2) ليكن a_1, a_2, \dots, a_n و b_1, b_2, \dots, b_n من \mathbb{Z}

$$(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}) a_i \equiv b_i [n] \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i \equiv \sum_{i=1}^n b_i [n] \\ \prod_{i=1}^n a_i \equiv \prod_{i=1}^n b_i [n] \end{cases}$$

$$(3) (\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3) a \equiv b [n] \Rightarrow \begin{cases} a+c \equiv b+c [n] \\ a.c \equiv b.c [n] \end{cases}$$

$$(4) (\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2) (\forall n' \in \mathbb{N}): a \equiv b [n] \Rightarrow a^{n'} \equiv b^{n'} [n]$$

برهان: لنبرهن على (1)

$$\text{نفترض أن } \begin{cases} a \equiv b [n] \\ c \equiv d [n] \end{cases}$$

$$\text{* لدينا } a \equiv b [n] \text{ يعني } (1) a-b = kn \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}$$

$$\text{و } c \equiv d [n] \text{ إذن } (2) c-d = k'n \text{ (} k' \in \mathbb{Z} \text{)}$$

* لنبيين أن $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subset \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{(n-1)}\}$

ليكن $\bar{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

نعتبر قسمة x على n . ليكن r هو باقي قسمة a على n

$$\begin{cases} x = nq + r \\ 0 \leq r < n \end{cases} \text{ أي:}$$

نعلم أن $x \equiv r[n]$ إذن $\bar{x} = \bar{r}$

ولدينا: $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

إذن $\bar{r} \in \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{(n-1)}\}$

ومنه $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subset \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{(n-1)}\}$

بالتالي: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{(n-1)}\}$

* لنحدد $\text{card } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

ليكن r' و r'' من $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ بحيث $r' \neq r''$

لنبيين أن $\bar{r}' \neq \bar{r}''$

نفترض أن $\bar{r}' = \bar{r}''$

يعني: $r' \equiv r''[n]$

يعني: $r - r'' = kn/k \in \mathbb{Z}$ أي $|r - r''| = |k|n$

ولدينا $\begin{cases} 0 \leq r < n \\ 0 \leq r'' < n \end{cases}$ إذن $|r - r''| < n$

يعني: $|k|n < n$

يعني $|k| < 1$

ولدينا $|k| \in \mathbb{N}$ إذن $k = 0$

ومنه $r = r''$ وهذا تناقض.

إذن $\bar{r}' \neq \bar{r}''$

بالتالي: $\text{Card } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = n$

خاصية:

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Card } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = n \quad (*)$$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{(n-1)}\} \quad (*)$$

(c) الجمع والضرب في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

ليكن X و Y من $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

نفترض أن: $X = \bar{x} = \bar{x}'$

و: $Y = \bar{y} = \bar{y}'$

$$\begin{cases} x \equiv x'[n] \\ y \equiv y'[n] \end{cases} \text{ إذن}$$

$$\begin{cases} x + y \equiv x' + y'[n] \\ xy \equiv x'y'[n] \end{cases} \text{ إذن}$$

$$\begin{aligned} \overline{x + y} &= \overline{x' + y'} \\ \overline{xy} &= \overline{x'y'} \end{aligned} \text{ إذن}$$

$$\begin{cases} x + y = \overline{x + y} \\ xy = \overline{xy} \end{cases} \text{ نضع إذن}$$

$$\begin{cases} \bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y} \\ \bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{xy} \end{cases} \text{ يعني:}$$

$$\bar{x} = \{y \in \mathbb{Z} / y \equiv x[3]\}$$

$$= \{y \in \mathbb{Z} / y = x + 3k / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{x} = \{y \in \mathbb{Z} / y = x + 3k / k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{إذن}$$

$$\bar{0} = \{3k / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$$

$$\bar{1} = \{1 + 3k / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$$

$$\bar{2} = \{2 + 3k / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$$

$$\bar{3} = \{3 + 3k / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\} = \bar{0}$$

(b) خاصيات:

-1 ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $x \in \mathbb{Z}$

$$\bar{x} = \{y \in \mathbb{Z} / y \equiv x[n]\}$$

$$y \in \bar{x} \Leftrightarrow y \equiv x[n] \Leftrightarrow y = x + nk / k \in \mathbb{Z}$$

$$\bar{x} = \{x + nk / k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{إذن:}$$

-2 ليكن $n \in \mathbb{N}$ و y, x من \mathbb{Z}

لنبيين أن: $\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x \equiv y[n]$

* (\Leftarrow) نفترض أن $x \equiv y[n]$ ولنبيين أن $\bar{x} = \bar{y}$

$$z \in \bar{x} \Leftrightarrow z \equiv x[n]$$

$$\Leftrightarrow z \equiv y[n] \quad (x \equiv y[n])$$

$$\Leftrightarrow z \in \bar{y}$$

إذن $\bar{x} = \bar{y}$

* (\Rightarrow) نفترض أن $\bar{x} = \bar{y}$ ولنبيين أن $x \equiv y[n]$

لدينا $\bar{x} = \bar{y}$ إذن يوجد z من \mathbb{Z} بحيث $z \in \bar{x}$ و $z \in \bar{y}$

$$\text{إذن} \quad \begin{cases} z \equiv x[n] \\ z \equiv y[n] \end{cases} \text{ إذن} \quad x \equiv y[n]$$

-3 ليكن $n \in \mathbb{N}$ و x, y من \mathbb{Z} بحيث $x \not\equiv y[n]$

لنبيين أن: $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$

- نفترض أن $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$

$$\text{إذن يوجد} \quad \begin{cases} z \equiv x[n] \\ z \equiv y[n] \end{cases} \text{ إذن} \quad z \in \bar{x} \cap \bar{y}$$

وهذا غير صحيح. إذن $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$

خاصية:

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و x, y من \mathbb{Z}

$$\bar{x} = \{x + nk / k \in \mathbb{Z}\} \quad (1)$$

$$\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x \equiv y[n] \quad (2)$$

$$\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset \Leftrightarrow x \not\equiv y[n] \quad (3)$$

هذا يعني أن صفتي تكافؤ منطبقان أو منفصلتان.

-4 تحديد $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ مع $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{(n-1)}\}$$

* لدينا:

$$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{(n-1)}\} \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

تعريف:

تعريف الجمع والضرب في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ بما يلي:

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{xy}$$

مثال:

ضع جدول الجمع والضرب في $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

- لدينا: $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

تمرين تطبيقي:

(* حل في \mathbb{Z} المعادلة: $4x \equiv 2[6]$
لدينا في $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$:

$$4x \equiv 2[6] \Leftrightarrow \bar{4}x = \bar{2}$$

$$\Leftrightarrow \bar{4} \cdot \bar{x} = \bar{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} = \bar{2} \\ \bar{x} = \bar{5} \end{cases} \quad (\text{من خلال الجدول})$$

$$\Leftrightarrow x \equiv 2[6] \text{ أو } x \equiv 5[6]$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + 6k \text{ أو } x = 5 + 6k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{إن: } S = \{2 + 6k, 5 + 6k / k \in \mathbb{Z}\}$$

(* حل في \mathbb{Z} المعادلة:

$$3x \equiv 1[5]$$

لدينا في $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$$3x \equiv 1[5] \Leftrightarrow \bar{3}x = \bar{1}$$

$$\Leftrightarrow \bar{3} \cdot \bar{x} = \bar{1}$$

لدينا: $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

بالتعويض نستنتج أن:

$$\bar{x} = \bar{2}$$

$$x \equiv 2[5]$$

$$x = 2 + 5k$$

$$S = \{2 + 5k / k \in \mathbb{Z}\}$$

خصائص:

(* الجمع والضرب وتبادليان في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

(* الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

(* $\bar{0}$ هو العنصر المحايد بالنسبة للجمع.

(* $\bar{1}$ هو العنصر المحايد بالنسبة للضرب.

(* \bar{x} يقبل مقابل $\bar{-x}$ ونرمز له ب $-\bar{x}$.

تلخص هذه الخصائص بقولنا $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ حلقة تبادلية وواحدية.

برهان:

- لنبين أن (+) تجميعي.

لدينا:

$$\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = \bar{x} + \overline{(y+z)}$$

$$= \overline{x+(y+z)} = \overline{(x+y)+z}$$

$$= \overline{(x+y)} + \bar{z}$$

$$\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} \quad \text{إن}$$

ملاحظة:

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2) \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{0} \Rightarrow \bar{x} = \bar{0} \text{ أو } \bar{y} = \bar{0}$$

مثل مضاد:

في $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ لدينا $\bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{0}$

و $\bar{3} \neq \bar{0}$ و $\bar{4} \neq \bar{0}$

III- القاسم المشترك الأكبر.

1 تعريف:

ليكن b و a من \mathbb{Z}^*

نعتبر المجموعة $A = \{d \in \mathbb{N}^* / d / a \text{ و } d / b\}$

(* لدينا $A \neq \emptyset$ (لأن $1 \in A$)

(* لدينا: $(\forall d \in A) d / a$

إن $d \leq |a|$

إن A مكبورة ب $|a|$

(* ولدينا $A \subset \mathbb{N}$

إن A تقبل أكبر عنصر.

نضع $\delta = \max A$

δ يسمى القاسم المشترك الأكبر ل b و a

ونكتب $\delta = a \wedge b$

تعريف:

ليكن b و a من \mathbb{Z}^*

نسمى القاسم المشترك الأكبر ل b و a أكبر قاسم موجب قطعاً

مشترك بين b و a . نرمز له ب $a \wedge b$ أو $a \Delta b$ أو $\text{pgcd}\{a, b\}$

مثال:

لنحدد $48 \wedge 36$

القواسم الموجبة ل 48 هي: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24,

48.

القواسم الموجبة ل 36 هي: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

إن القواسم المشتركة: 1, 2, 3, 4, 6, 12. إن $48 \wedge 36 = 12$

ملاحظة:

$$a \wedge b = b \wedge a \quad (*)$$

$$0 \wedge b = |b| \quad \text{إذا كان } b \neq 0 \text{ نضع } (*)$$

$$0 \wedge 0 \text{ غير معرف. } (*)$$

$$a \wedge b = |a| \quad \text{فإن } a/b \text{ فإن } (*)$$

$$d' \leq d \quad \text{فإن } \begin{cases} d'/a \\ d'/b \end{cases} \text{ وإذا كان } \begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases} \text{ يعني } a \wedge b = d \quad (*)$$

(2) خاصيات:

$$-1 \text{ ليكن } b \text{ من } \mathbb{Z}^*$$

$$\text{ليكن } d = a \wedge b$$

$$\text{لنبين أنه يوجد } (u, v) \text{ من } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ بحيث } d = au + bv$$

$$* \text{ نعتبر المجموعة: } A = \{au + bv / u, v \in \mathbb{Z}\}$$

$$- \text{ لدينا } A \neq \emptyset \text{ لأن } n = a^2 + b^2 \in A$$

$$- \text{ لدينا } A \text{ مصغورة ب } 1.$$

$$- \text{ لدينا } A \subset \mathbb{N}$$

$$\text{إذن لدينا } p \text{ صاغر ل } A$$

$$\text{و } p \in A \text{ إذن يوجد } (u, v) \text{ من } \mathbb{Z}^2 \text{ بحيث } p = au + bv$$

$$* \text{ لنبين أن } d = p$$

$$- \text{ لدينا } \begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} d/au \\ d/bv \end{cases} \text{ إذن } d/au + bv \text{ يعني } d/p$$

$$\text{إذن } |d| \leq |p| \text{ يعني } d \leq p \quad (1)$$

$$- \text{ لنبين أن } p/a$$

$$\text{نعتبر القسمة الأقليدية ل } a \text{ على } p \text{ يعني } \begin{cases} a = pq + r \\ 0 \leq r < p \end{cases}$$

$$\text{لنبين أن } r = 0 \text{ : نفترض أن } r \neq 0 \text{ إذن } 0 < r < p$$

$$r = a - pq$$

$$= a - (au + bv)q$$

$$= a(1 - uq) + b(-Vq)$$

لدينا:

$$\text{لدينا } \begin{cases} r = aU + bV \\ r \in \mathbb{N}^* \end{cases} \text{ إذن } r \in A \text{ ولدينا } r < p \text{ و } p = \sin A$$

$$\text{هذا تناقض. إذن } r = 0.$$

$$\text{ومنه } p/a$$

$$\text{وبنفس الطريقة نبين أن } p/b$$

$$\text{إذن } p \text{ قاسم مشترك ل } b \text{ و } a \wedge b = d$$

$$\text{إذن } p \leq d \quad (2)$$

$$\text{من (1) و (2) نستنتج أن: } p = d$$

$$\text{إذن: } d = au + bv$$

خاصية (1):

$$\text{ليكن } b \text{ من } \mathbb{Z}^*$$

$$\text{إذا كان } a \wedge b = d \text{ فإنه يوجد زوج } (u, v) \text{ من } \mathbb{Z}^2 \text{ بحيث:}$$

$$d = au + bv$$

ملاحظة:

$$\text{ليكن } b \text{ من } \mathbb{Z}^* \text{ وليكن } d = a \wedge b$$

$$* \text{ العدد } d \text{ هو أصغر عدد طبيعي غير منعدم يكتب على شكل}$$

$$d = au + bv$$

$$* \text{ الزوج } (u, v) \text{ ليس وحيدا.}$$

$$-2 \text{ ليكن } b \text{ من } \mathbb{Z}^* \text{ و } d = a \wedge b$$

$$\text{لنبين أن: } \begin{cases} d'/a \\ d'/b \end{cases} \Leftrightarrow d'/d$$

$$(*) \Leftarrow \text{ نفترض أن } d'/d$$

$$\text{ولدينا } \begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases} \text{ إذن: } \begin{cases} d'/a \\ d'/b \end{cases}$$

$$(*) \Rightarrow \text{ نفترض أن } \begin{cases} d'/a \\ d'/b \end{cases}$$

$$\text{لدينا } d = a \wedge b \text{ إذن } d = au + bv \text{ مع } (u, v) \in \mathbb{Z}^2$$

$$\text{لدينا } \begin{cases} d'/a \\ d'/b \end{cases} \text{ أن } \begin{cases} d'/au \\ d'/bv \end{cases} \text{ إذن } d'/au + bv \text{ يعني } d'/d$$

خاصية (2):

$$\text{ليكن } b \text{ من } \mathbb{Z}^* \text{ و } d = a \wedge b$$

$$\text{لدينا: } \begin{cases} d'/a \\ d'/b \end{cases} \Leftrightarrow d'/d$$

$$\text{وهذا يعني أن القواسم المشتركة ل } b \text{ هي بالضبط قواسم } d$$

$$\begin{cases} d'/a \\ d'/b \end{cases} \Leftrightarrow d'/a \wedge b$$

ملاحظة:

$$\text{ليكن } b \text{ من } \mathbb{Z}^*$$

$$(*) \text{ لدينا: } |a| \wedge |b| = a \wedge b = |a| \wedge |b|$$

برهان:

$$\text{لنبين أن: } |a| \wedge |b| = a \wedge b$$

$$\text{نضع } d = a \wedge b \text{ و } d' = |a| \wedge |b|$$

$$- \text{ لدينا } d = a \wedge b \text{ إذن } \begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases}$$

$$\text{ولدينا: } \begin{cases} a/|a| \\ b/|b| \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} d'/|a| \\ d'/|b| \end{cases} \text{ يعني } d'/|a| \wedge |b|$$

$$\text{يعني } d'/d' \quad (1)$$

$$- \text{ لدينا } d' = |a| \wedge |b| \text{ إذن } \begin{cases} d'/|a| \\ d'/|b| \end{cases} \text{ ولدينا } \begin{cases} |a|/a \\ |b|/b \end{cases}$$

$$\text{إذن } \begin{cases} d'/a \\ d'/b \end{cases} \text{ يعني } d'/a \wedge b \text{ يعني } d'/d \quad (2)$$

$$\text{من (1) و (2) نستنتج أن } |d| = d'$$

$$\text{إذن: } a \wedge b = |a| \wedge |b|$$

$$(*) \text{ إذن يلغي البحث عن طرق تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين موجبين.}$$

(5) خوارزمية إقليدس:

خاصية (1)

$$\text{ليكن } b \text{ من } \mathbb{N}^*$$

$$\text{إذا كان } r \text{ هو باقي قيمة } a \text{ على } b \text{ يعني: } \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

$$\text{فإن } a \wedge b = b \wedge r$$

برهان:

$$\text{لدينا } \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases} \text{ لنبين أن } a \wedge b = b \wedge r$$

نضع: $d = d'$ لنبين أن $d' = b \wedge r$ و $d = a \wedge b$

$$\text{- لدينا: } \begin{cases} d' / a \\ d' / r \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} d' / bq \\ d' / r \end{cases} \text{ إذن } d' / bq + r$$

يعني d' / a

$$\text{إذن } \begin{cases} d' / a \\ d' / b \end{cases} \text{ يعني } d' / a \wedge b \text{ يعني } d' / d \quad (1)$$

$$\text{- لدينا } \begin{cases} d' / a \\ d' / b \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} d' / a \\ d' / bq \end{cases} \text{ إذن } d' / a - bq \text{ يعني}$$

$$\begin{cases} d' / b \\ d' / r \end{cases} \text{ إذن } d' / r \text{ يعني } d' / b \wedge r$$

$$(2) \quad d' / d'$$

من (1) و (2) نستنتج أن $|d| = |d'|$

وبما أن d و d' وجبان قطعاً فإن $d = d'$

$$\text{يعني } a \wedge b = b \wedge r$$

ملاحظة:

في البرهان م نستعمل كون $0 \leq r < b$. إذن بصفة عامة:

$$\text{إذا كان } a = bq + r \text{ فإن } a \wedge b = b \wedge r$$

مثال:

$$\text{لنحدد } 416 \wedge 76$$

$$\text{لدينا } \begin{array}{r} 416 \\ 76 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$\text{إذن } 416 = 76 \times 5 + 36$$

$$\text{إذن } 416 \wedge 76 = 76 \wedge 36$$

$$\text{ولدينا: } 76 = 2 \times 36 + 4$$

$$\text{إذن } 76 \wedge 36 = 36 \wedge 4$$

$$\text{ولدينا } 36 = 9 \times 4 + 0$$

$$\text{إذن: } 4 / 36 \text{ ومنه: } 36 \wedge 4 = |4| = 4$$

$$\text{بالتالي: } 76 \wedge 36 = 4$$

$$\text{أي: } 416 \wedge 76 = 4$$

نلخص هذا في الجدول التالي:

416	76	36	4
	5	2	9
36	4	0	

تعميم:

ليكن a, b من \mathbb{N}^* بحيث $a > b$

* نقوم بقسمة a على b : $a = bq_1 + r_1$, $0 \leq r_1 < b$

- إذا كان $r_1 = 0$ فإن b / a إذن $a \wedge b = b$

- إذا كان $r_1 \neq 0$ فإن $a \wedge b = b \wedge r_1$

نقوم بقسمة b على r_1 : $b = r_1 q_2 + r_2$, $0 \leq r_2 < r_1$

- إذا كان $r_2 = 0$ فإن r_1 / b إذن $b \wedge r_1 = r_1$

- إذا كان $r_2 \neq 0$ فإن $b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2$

وهكذا نتائج القسمة المتتالية حتى نحصل على باقي منعدم (ومن

الضروري الحصول على باقي منعدم لأن هذه البواقي موجبة

وتناقضية قطعاً).

نفترض أن r_{n+1} أول باقي منعدم.

$$\text{يعني: } r_{n+1} = 0 \text{ و } r_n \neq 0$$

$$a \wedge b = b \wedge r_1 \quad 0 \leq r_1 < b \quad a = bq_1 + r_1$$

$$b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 \quad 0 \leq r_2 < r_1 \quad b = r_1 q_2 + r_2$$

$$\text{لدينا } r_{n+1} = 0 \text{ إذن } r_n / r_{n-1} \quad r_{n+1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1}$$

$$\text{ومنه } r_{n-1} \wedge r_n = r_n$$

إذن $a \wedge b = r_n$ وهو آخر باقي غير منعدم.

خاصية:

ليكن a, b من \mathbb{N}^*

القاسم المشترك الأكبر هو آخر باقي غير منعدم في القسمة المتتالية (خوارزمية أقليدس).

ملاحظة:

نلخص هذه النتائج في الجدول:

a	b	r_1	r_2
	q_1	q_2	q_3			
r_1	r_2	r_3	-	-	r_n	0

مثال:

$$\text{لنحدد: } 792 \wedge 36$$

لدينا:

792	36	16	4
	21	2	4
16	4	0	

$$\text{إذن: } 792 \wedge 36 = 4$$

(4) الأعداد الأولية فيما بينها:

(a) تعريف:

ليكن a, b من \mathbb{Z}^*

نقول إن a و b أوليان فيما بينهما إذا فقط إذا كان $a \wedge b = 1$

مثال: $9 \wedge 4 = 1$

إذن 9 و 4 أوليان فيما بينهما.

(b) خاصيات:

مبرهنة (1): (مبرهنة Bezout)

ليكن a, b من \mathbb{Z}^*

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2): 1 = au + bv$$

برهان:

(\Rightarrow) نفترض أن $a \wedge b = 1$ من خلال خاصية سابقة نستنتج أن:

$$(\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2): 1 = au + bv$$

(\Leftarrow) نفترض أن $(\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2): 1 = au + bv$ لنبين أن $a \wedge b = 1$

نضع $d = a \wedge b$ ولنبين أن: $d = 1$

$$\text{لدينا: } \begin{cases} d / a \\ d / b \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} d / au \\ d / bv \end{cases} \text{ إذن } d / au + bv \text{ أو } d / -1$$

يعني $d / 1$

$$\text{إذن } d = 1 \text{ أو } d = -1$$

ولدينا $d > 0$ إذن $d = 1$ يعني $a \wedge b = 1$.

مثال:

ليكن $n \in \mathbb{Z}$ مع $n \neq 0$ و $n \neq -1$. لنحدد: $(n+1) \wedge n$

$$\text{لدينا: } 1(n+1) - 1(n) = 1$$

$$\text{إذن } (n+1) \wedge n = 1$$

مبرهنة (2)

ليكن c زوج من \mathbb{Z}^*
لدينا $ac \wedge bc = |c|(a \wedge b)$

برهان:

نضع $d' = a \wedge b$ و $a \in b \wedge$
لنبين أن $d = |c|d'$

لدينا $\begin{cases} d' \wedge a \\ d' \wedge b \end{cases}$ ولدينا $|c|/c$ يعني $\begin{cases} |c|d'/ac \\ |c|d'/bc \end{cases}$
 $|c|d'/ac \wedge bc$

يعني $|c|d'/d$ (1)

لدينا: $d' = a \wedge b$ إذن: $d' = au + bv$ ($\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2$):

إذن $|c|d' = |c|au + |c|bv$

ولدينا: $d = ac \wedge bc$

إذن $\begin{cases} d/ac \\ d/bc \end{cases}$ إذن $\begin{cases} d/a|c \\ d/b|c \end{cases}$ إذن $\begin{cases} d/a|c|u \\ d/b|c|v \end{cases}$

إذن $d/a|c|u + b|c|v$

يعني: $d/d'|c|$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن: $d = |c|d'$ (لأنهما عدنان موجبان)

مبرهنة (3)

ليكن $d \in \mathbb{N}^*$ و \mathbb{Z}^* زوج من \mathbb{Z}^*

$$a \wedge b = d \Leftrightarrow \begin{cases} d/a \text{ et } d/b \\ \frac{a}{d} \wedge \frac{b}{d} = 1 \end{cases}$$

برهان:

(\Leftarrow) نفترض أن $\begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases}$ ولنبين $\frac{a}{d} \wedge \frac{b}{d} = 1$ و $a \wedge b = d$

لدينا: $a \wedge b = d \cdot \frac{a}{d} \wedge d \cdot \frac{b}{d} = |d| \left(\frac{a}{d} \wedge \frac{b}{d} \right) = d \cdot 1 = d$

إذن: $a \wedge b = d$

(\Rightarrow) نفترض أن $a \wedge b = d$ لنبين أن $\begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases}$ و $\frac{a}{d} \wedge \frac{b}{d} = 1$

- لدينا $a \wedge b = d$ إذن $\begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases}$

- لدينا $a \wedge b = d$ إذن $d = au + bv$ ($\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2$):

يعني: $d = d \cdot \frac{a}{d}u + d \cdot \frac{b}{d}v$

يعني: $d = d \left(\frac{a}{d}u + \frac{b}{d}v \right)$

يعني: $1 = \frac{a}{d}u + \frac{b}{d}v$

وحسب (Bezout) نستنتج أن $\frac{a}{d} \wedge \frac{b}{d} = 1$

ملاحظة:

ليكن $d = a \wedge b$ و \mathbb{Z}^* زوج من \mathbb{Z}^*

نضع: $\begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases}$ لدينا $\begin{cases} a' = \frac{a}{d} \\ b' = \frac{b}{d} \end{cases}$ إذن $a' \wedge b' = \frac{a}{d} \wedge \frac{b}{d} = 1$

إذن إذا كان $\begin{cases} d = a \wedge b \\ a = da' \\ b = db' \end{cases}$ فإن $a' \wedge b' = 1$

مبرهنة (4)

ليكن \mathbb{Z}^* زوج من \mathbb{Z}^*

لدينا: $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow a \wedge bc = 1$

برهان:

لدينا $a \wedge b = 1$ إذن: $1 = au + bv$ ($\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2$): (1)

و $a \wedge c = 1$ إذن: $1 = au' + cv'$ ($\exists(u', v') \in \mathbb{Z}^2$): (2)

من (1) . (2) نستنتج أن:

$$1 = a^2uu' + acuv' + bau'v + bcvv'$$

$$1 = a(auu' + cuv' + bu'v) + bc(vv')$$

يعني

$$1 = aU + bcV$$

وحسب (Bezout) نستنتج أن:

$$a \wedge bc = 1$$

ملاحظة:

الاستلزام العكسي صحيح.

استنتاج:

1- ليكن b_1, b_2, \dots, b_n زوج من \mathbb{Z}^*

$$(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}) a_i b_i = 1 \Rightarrow a \wedge \prod_{i=1}^n b_i = 1$$

2- ليكن \mathbb{Z}^* زوج من \mathbb{Z}^*

$$(\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2) a \wedge b = 1 \Rightarrow a^m \wedge b^n = 1$$

مبرهنة (5): (مبرهنة Gauss)

ليكن \mathbb{Z}^* زوج من \mathbb{Z}^*

لدينا: $\begin{cases} a/c \\ b/c \end{cases} \Rightarrow ab/c$ و $a \wedge b = 1$

ملاحظة:

إذا كان $a \wedge b \neq 1$ فإن الاستلزام خاطئ:

مثلا: $\begin{cases} 6/12 \\ 4/12 \end{cases}$ لكن 6.4×12

برهان:

لدينا a/c إذن $c = ak$ $\exists k \in \mathbb{Z}$

و b/ak يعني b/c

ولدينا $a \wedge b = 1$ إذن حسب (Gauss) نستنتج أن b/k

إذن $k = bk'$

ومنه $c = abk'$

إذن ab/c

ملاحظة:

$$\begin{cases} a_1/b \\ a_2/b \\ \vdots \\ a_n/b \end{cases} \Rightarrow a_1 \cdot a_2 \dots a_n / b$$

أولية فيما بينها مثلى مثلى

ميرهنة (7):

ليكن a و b من \mathbb{Z}^* و $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} ax \equiv ay [n] \\ a \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow x \equiv y [n]$$

ملاحظة:

إذا كان $a \wedge n + 1$ فإن الاستلزام خاطئ.
مثل: $3 \cdot 2 \equiv 3 \cdot 4 [6]$ لكن $2 \not\equiv 4 [6]$
برهان:

لدينا $ax \equiv ay [n]$ يعني $n/ax - ay$
يعني $n/a(x - y)$

ولدينا $a \wedge n = 1$ إذن حسب (Gauss) نستنتج أن:
 $n/x - y$

يعني $x \equiv y [n]$

إذن: $\begin{cases} ax \equiv ay [n] \\ a \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow x \equiv y [n]$

(5) حل المعادلة $ax + by = c$ في \mathbb{N} .

(a) أمثلة:

مثال 1: لنحل في \mathbb{Z}^2 المعادلة $3x - 4y = 1$ (1).

* لدينا $3 \wedge 4 = 1$ إذن حسب Bezout يوجد زوج (u, v) من \mathbb{Z} .

بحيث: $3u + 4v = 1$

يعني: $3u - 4(-v) = 1$

إذن $(u, -v)$ حل للمعادلة (1)

وبالتالي المعادلة (1) تقبل حلا على الأقل.

* لنبحث عن حل خاص للمعادلة (1).

نلاحظ أن $(-1, -1)$ حل للمعادلة (1).

* لنحدد جميع الحلول:

ليكن (x, y) حل للمعادلة (1).

لدينا $3(-1) - 4(-1) = 1$ (2)

ولدينا $(-1, -1)$ حل إذن: $3(-1) - 4(-1) = 1$ (3)

من (3) - (2) نستنتج أن: $3(x+1) - 4(y+1) = 0$

يعني $3(x+1) = 4(y+1)$

إذن $3/4(y+1)$

ولدينا $3 \wedge 4 = 1$ إذن حسب (Gauss) لدينا: $3/y + 1$.

يعني $y + 1 = 3k$ يعني: $y = 3k - 1$

وبالتعويض في (2) نحصل على:

$3x - 4(3k - 1) = 1$

$3x = 12k - 3$ يعني

$x = 4k - 1$ يعني

إذن: $\begin{cases} y = 3k - 1 \\ x = 4k - 1 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

عكسا

نلاحظ أنه تم حساب x انطلاقا من المعادلة (2) إذن y يحققان المعادلة (1)

وبالتالي: $S = \{(4k - 1; 3k - 1) / k \in \mathbb{Z}\}$

مثال 2:

لنحل في \mathbb{Z}^2 المعادلة: $67x + 57y = 2$ (E)

* لنحدد $67 \wedge 57$

67	57	10	7	3	1
	1	5	1	2	3
10	7	3	□	0	

إذن $67 \wedge 57 = 1$

وحسب Bezout فإنه يوجد (u, v) بحيث $67u + 57v = 1$

يعني $67(2u) + 57(2v) = 2$

إذن الزوج $(2u, 2v)$ حل للمعادلة (E).

إذن (E) تقبل حلا على الأقل.

* لنبحث عن حل خاص للمعادلة (E).

خوارزمية أقليدس تمكننا من البحث عن حل خاص إذا لم يكن هناك حل واضح.

لدينا: $67 = 1 \times 57 + 10$ (1)

$57 = 5 \times 10 + 7$ (2)

$10 = 1 \times 7 + 3$ (3)

$7 = 2 \times 3 + 1$ (4)

نضع $b = 57$ و $a = 67$

من (1) نحصل على: $10 = a - b$

من (2) نحصل على: $7 = 6b - 5a$ أي $b = 5(a - b) + 7$

من (3) نحصل على: $3 = 6a - 7b$ أي $a - b = (6b - 5a) + 3$

من (4) نحصل على: $1 = 6b - 5a = 2(6a - 7b) + 1$ أي

$-17a + 20b = 1$

يعني: $67(-17) + 57(20) = 1$

يعني: $67(-34) + 57(40) = 2$

إذن $(-34, 40)$ حل للمعادلة (E).

* لنحدد جميع حلول المعادلة (E).

ليكن (x, y) حل للمعادلة.

إذن $67x + 57y = 2$ (1)

ولدينا $(-34, 40)$ حل إذن:

$67(-34) + 57(40) = 2$ (2)

من (1) - (2) نستنتج أن:

$67(x + 34) + 57(y - 40) = 0$

يعني $67(x + 34) = -57(y - 40)$

إذن $57/67(x + 34)$

وبما أن $57 \wedge 67 = 1$ فإن $57/x + 34$

أي $x + 34 = 57k$

إذن $x = 57k - 34$

وبالتعويض في (1) نجد:

$57y = -67 \times 57k + 2280$

ومنه $y = -67k + 40$

2- خاصيات:

خاصية (1):

ليكن a_1, a_2, \dots, a_n من \mathbb{Z}^*

$$d = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \Rightarrow \exists (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n / d = \sum_{i=1}^n a_i u_i$$

خاصية (2):

ليكن: $d = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$

قواسم d هي بالضبط القواسم المشتركة للأعداد a_i

$$\begin{cases} d'/a_1 \\ d'/a_2 \\ \vdots \\ d'/a_n \end{cases} \text{ يعني: } d'/a_1 \wedge d'/a_2 \wedge \dots \wedge d'/a_n = d$$

خاصية (3):

ليكن a, b, c من \mathbb{Z}^*

$$a \wedge b \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

لدينا: هذا يعني أنه عندك حساب القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد يمكن تعويض كل اثنين بالقاسم المشترك الأكبر لهما.

(3) الأعداد الأولية فيما بينها:

(a) تعريف:

نقول إن الأعداد a_1, a_2, \dots, a_n من \mathbb{Z}^* أولية فيما بينها إذا فقط إذا كان

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = 1$$

لاحظة:

لا يجب الخلط بين أعداد أولية فيما بينها وأعداد أولية فيما بينها متنى متنى.

مثلا: الأعداد 9, 12, 16, 4, 30 أولية فيما بينها.

لكنها ليست أولية فيما بينها متنى متنى.

(b) خاصيات:

خاصية (1):

ليكن a_1, a_2, \dots, a_n من \mathbb{Z}^*

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = 1 \Leftrightarrow \exists (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n / 1 = \sum_{i=1}^n a_i u_i$$

خاصية (2):

ليكن a_1, a_2, \dots, a_n من \mathbb{Z}^* و $d > 0$

$$d = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \Leftrightarrow \begin{cases} d/a_1 \text{ et } d/a_2 \dots d/a_n \\ \frac{a_1}{d} \wedge \frac{a_2}{d} \wedge \dots \wedge \frac{a_n}{d} = 1 \end{cases} \text{ لدينا:}$$

(V) المضاعف المشترك الأصغر:

(1) تعريف:

ليكن a, b من \mathbb{Z}^*

ونعتبر المجموعة $E = \{m \in \mathbb{N}^* / a/m \text{ et } b/m\}$

- لدينا $E \neq \emptyset$ (لأن $|ab| \in E$)

- E مصغورة ب 0.

- $E \subset \mathbb{N}$

إن E تقبل الأصغر عنصر نضع: $q = \min E$

q يسمى المضاعف المشترك الأصغر ل a, b . ونكتب

$$q = a \vee b$$

$$\begin{cases} x = 57k + 34 \\ y = -67k + 40 \end{cases} \text{ إذن: } (k \in \mathbb{Z})$$

عكسيا:

(x, y) يحققان (E) لأنه تم تحديد y انطلاقا من (E)

* وبالتالي: $S = \{(57k + 34; -67k + 40) / k \in \mathbb{Z}\}$

(b) تعميم:

نعتبر المعادلة (E) $ax + by = c$ مع $a \neq 0$ و $b \neq 0$

- نضع $d = a \wedge b$

-1 إذا كان $d \times c$

نفترض أن المعادلة تقبل حلا (x, y) .

$$ax + by = c \text{ إذن}$$

$$\text{ولدينا } \begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} d/ax \\ d/by \end{cases} \text{ إذن } d/ax + by \text{ يعني } d/c$$

وهذا تناقض. إذن المعادلة ليس لها حل.

-2 إذا كان d/c

$$\text{نضع: } \begin{cases} a = da' \\ b = db' \\ c = dc' \end{cases} \text{ مع } a' \wedge b' = 1$$

إن (E) تصبح: $a'dx + b'dy = c'd$

$$(E') \quad a'x + b'y = c'$$

* لدينا $a' \wedge b' = 1$

إن يوجد (u, v) بحيث $a'u + b'v = 1$

$$\text{يعني: } a'(c'u) + b'(c'v) = c'$$

إن $(c'u, c'v)$ حل للمعادلة (E') .

إن (E) لها حل.

* لنبحث عن حل خاص:

باستعمال خوارزمية أقليدس إذا لم يكن هناك حل واضح.

نفترض أن (x_0, y_0) حل خاص للمعادلة.

$$\text{يعني } (1) \quad a'x_0 + b'y_0 = c'$$

* ليكن (x, y) حل للمعادلة يعني: $(2) \quad a'x + b'y = c'$

$$\text{من (1) و (2) نجد: } a'(x - x_0) + b'(y - y_0) = 0$$

$$\text{يعني: } a'(x - x_0) = -b'(y - y_0)$$

$$\text{إن } b'/a'(x - x_0)$$

$$\text{ولدينا } a' \wedge b' = 1 \text{ إذن } b'/(x - x_0) \text{ يعني } x = b'k + x_0$$

وبالتعويض في (E') نجد

$$a'(b'k + x_0) + b'y = c'$$

$$b'y = c' - a'x - a'b'k$$

يعني:

$$\text{ولدينا من (1): } a'x_0 = c' - b'y_0$$

$$\text{إن } b'y = c' - c' + b'y_0 - a'b'k$$

$$\text{إن } y = -a'k + y_0$$

عكسيا: (x, y) يحقق (E) لأنه تم حساب y انطلاقا من (E)

$$\text{وبالتالي: } S = \{(b'k + x_0, -a'k + y_0) / k \in \mathbb{Z}\}$$

(IV) القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد:

1- تعريف:

ليكن a_1, a_2, \dots, a_n أعداد غير منعدمة نسمي القاسم المشترك الأكبر لهذه الأعداد أكبر قاسم مشترك موجب قطعاً لهذه الأعداد. ونرمز له ب $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$

1) تعريف:

ليكن \mathbb{Z}^* هو b من \mathbb{Z}^* نسمي المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b أصغر مضاعف موجب مشترك بين a و b . ونرمز له بـ $a \vee b$.

* ملاحظة:

$$\begin{cases} a/m \\ b/m \end{cases} \text{ يعني } m = a \vee b$$

وإذا كان m' مضاعف مشترك لـ a و b فإن $m \leq m'$

$$b \vee a = a \vee b$$

$$a \vee a = |a|$$

إذا كان a/b فإن $a \vee b = |b|$

2) خاصيات:

خاصية (1):

ليكن $a \vee b$ من \mathbb{Z}^* و $m = a \vee b$ مضاعفات m هي بالضبط المضاعفات المشتركة لـ a و b .

$$\text{يعني: } \begin{cases} a/m' \\ b/m' \end{cases} \Leftrightarrow m = a \vee b/m'$$

برهان:

(\Leftarrow) نفترض أن a/m' و b/m' وليدنا $\begin{cases} a/m' \\ b/m' \end{cases}$ إذن $\begin{cases} a/m \\ b/m \end{cases}$

(\Rightarrow) نفترض أن: a/m' و b/m' لنبين أن m/m' نعتبر قسمة m' على m . يعني:

$$\begin{cases} m' = mq + r \\ 0 \leq r < m \end{cases}$$

لنبين أن $r = 0$

نفترض العكس. يعني $r \neq 0$

إذن $0 < r < m$

لدينا: $r = m' - mq$

ولدينا $\begin{cases} a/m \\ a/m' \end{cases}$ إذن $a/m' - mq$ يعني a/r

وبنفس الطريقة نجد b/r

إذن r مضاعف مشترك لـ a و b .

وجدنا أن r مضاعف مشترك لـ a و b ويحقق $0 < r < m$ وهذا

تناقض لأن $a \vee b = m$

إذن $r = 0$ ومنه m/m' .

ملاحظة:

$$|a| \vee |b| = |a \vee b| = a \vee b$$

خاصية (2):

ليكن $a \vee b$ من \mathbb{Z}^*

$$(a \wedge b) \cdot (a \vee b) = |ab|$$

لدينا:

برهان:

$$\begin{cases} d = a \wedge b \\ m = a \vee b \end{cases} \text{ نضع}$$

$$\text{نضع مع } \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \end{cases} \alpha \wedge \beta = 1$$

$$\begin{cases} m = \gamma a \\ m = \varphi b \end{cases} \text{ ونضع}$$

ولدينا: $\gamma a = \varphi b$ يعني: $\gamma \alpha d = \varphi \beta d$

يعني: $\gamma \alpha = \varphi \beta$

إذن $\alpha/\varphi \beta$

ولدينا $\alpha \wedge \beta = 1$ إذن α/φ يعني: $\varphi = dk$

إذن: $m = \varphi b$

يعني: $m = \alpha k \beta d$ إذن $\alpha \beta d/m$ (1)

* لنبين أن $m/\alpha \beta d$

لدينا: $\alpha \beta d = \alpha b$ و $\alpha \beta d = \beta a$ إذن $\begin{cases} b/\alpha \beta d \\ a/\alpha \beta d \end{cases}$ إذن

$$a \vee b / \alpha \beta d$$

يعني: $m/\alpha \beta d$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن:

$$|m| = |\alpha \beta d|$$

$$m = |\alpha \beta d| \text{ يعني:}$$

$$dm = |\alpha \beta d^2| \text{ يعني:}$$

$$dm = |ab| \text{ يعني:}$$

$$(a \wedge b) \cdot (a \vee b) = |ab| \text{ ومنه:}$$

خاصية (3):

ليكن $a \vee b$ من \mathbb{Z}^*

$$ac \vee bc = |c|(a \vee b) \text{ لدينا:}$$

برهان:

$$(ac \wedge bc)(ac \vee bc) = |ac \cdot bc| \text{ نعلم أن:}$$

$$|c|(a \wedge b) \cdot (ac \vee bc) = |ab| \cdot |c|^2 \text{ يعني:}$$

$$(a \wedge b) \cdot (ac \vee bc) = (a \wedge b)(a \vee b)|c| \text{ يعني:}$$

$$(ac \vee bc) = |c| \cdot (a \vee b) \text{ يعني:}$$

تمرين:

ليكن $a \vee b$ من \mathbb{Z}^* و $m > 0$

$$m = a \vee b \Leftrightarrow \begin{cases} a/m \text{ et } b/m \\ \frac{m}{a} \wedge \frac{m}{b} = 1 \end{cases}$$

3) المضاعف المشترك الأصغر لعدة أعداد:

تعريف:

ليكن a_1, a_2, \dots, a_n من \mathbb{Z}^*

المضاعف المشترك الأصغر لهذه الأعداد هو أصغر مضاعف

موجب مشترك بين هذه الأعداد.

خاصية:

ليكن a_1, a_2, \dots, a_n من \mathbb{Z}^* و $m = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$

مضاعفات m هي بالضبط المضاعفات المشتركة للأعداد a_i .

(VI) الأعداد الأولية:

1) تعريف:

تعريف (1):

ليكن a من \mathbb{Z}^* .

نسمي قاسم فعلي لـ a كل قاسم d لـ a يخالف $a, -a, 1, -1$.

يعني $d \notin \{a, -a, 1, -1\}$.

تعريف (2):

ليكن $p \in \mathbb{Z}^* - \{-1, 1\}$

نقول إن p أولي إذا وفقط إذا كان لا يقبل أي قاسم فعلي يعني إذا

كان يقبل 4 قواسم بالضبط هي $1, -1, p, -p$.

أمثلة:

* $1, 0, -1$ ليست أولية.

* 4 ليس أولي لأن 2 قاسم فعلي ل 4 .

* $2, 3, 5, 7$ أعداد أولية.

(2) خاصية (1):

خاصية (1):

ليكن $a \in \mathbb{Z}^* - \{-1, 1\}$ غير أولي.

أصغر قاسم فعلي موجب ل a يكون أوليا.

برهان:

لتكن A مجموعة القواسم الفعلية الموجبة ل a .

- لدينا $A \neq \emptyset$ (لأن a ليس أولي وبالتالي يقبل قاسم فعلي موجب)

- لدينا A مصغرة ب 0 .

$A \subset \mathbb{N}$

إذن A تقبل الأصغر عنصر. نضع $p = \min A$

- لنبين أن p أولي:

لدينا p قاسم فعلي ل a إذن $a \in \{1, -1, p\}$ لأن $p \neq 0$ لأن $a \neq 0$

لنبين أن p لا يقبل قاسما فعليا.

نفترض أن p يقبل قاسما فعليا p'

لدينا $\left\{ \begin{array}{l} p'/p \\ p/a \end{array} \right\}$ إذن $|p'|/a$

- لدينا $|p'|/p$ إذن $|p'| \leq |p|$

يعني: $|p'| \leq p$

ولدينا $\left\{ \begin{array}{l} p' \neq p \\ p' \neq -p \end{array} \right\}$ إذن $|p'| < p$

ولدينا p/a إذن $|p| < |a|$ أي $|p| < |a|$

إذن $|p'| < |a|$

إذن $|p'| \neq |a|$

ولدينا $|p'| \neq 1$

إذن $|p'|$ قاسم فعلي ل a

ولدينا $|p'| < p$

وجدنا قاسما فعليا موجبا ل a ويحقق $|p'| < p$

وهذا تناقض لأن p أصغر قاسم فعلي موجب.

ومنه p لا يقبل قاسما فعليا.

وبالتالي p أولي.

ملاحظة:

كل عدد $a \in \mathbb{Z}^* - \{-1, 1\}$ غير أولي يقبل قاسم فعلي أولي موجب.

خاصية (2):

مجموعة الأعداد الأولية غير المنتهية.

برهان:

لتكن P مجموعة الأعداد الأولية الموجبة.

لنبين أن P غير مكبورة.

نفترض العكس. يعني P مكبورة.

- لدينا $P \neq \emptyset$ (لأن $2 \in P$).

$P \subset \mathbb{N}$

إذن P تقبل الأكبر عنصر. نضع: $q = \max P$

- نضع $p = q! + 1$

لنبين أن p أولي:

نفترض العكس. يعني p يقبل قاسما فعليا أولي موجب p_0 .

لدينا $P = \{2, 3, 5, 7, \dots, q\}$

ولدينا $p_0 \in P$ أولي موجب إذن $p_0 \in P$

إذن p_0 هو أحد عوامل $q!$ إذن $p_0/q!$

ولدينا p_0/p

إذن $p_0/p - q!$

يعني $p_0/1$

يعني $p_0 = 1$ أو $p_0 = -1$

وهذا تناقض لأن p_0 أولي.

إذن p أولي.

- وجدنا إذن p أولي و $p > q$ وهذا تناقض لأن q هو أكبر عدد أولي.

بالتالي P غير مكبورة.

ومنه P غير منتهية.

(3) طريقة عملية لتحديد الأعداد الأولية:

ملاحظة:

إذا كان p عدد أولي فإن $-p$ أولي. وبالتالي يكفي البحث عن طرق لتحديد الأعداد الأولية الموجبة.

خاصية:

ليكن $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

إذا كان n غير أولي فإنه يوجد عدد أولي p بحيث $\left\{ \begin{array}{l} p/n \\ p^2 \leq n \end{array} \right.$

برهان:

نفترض أن n غير أولي.

لدينا $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

ليكن p أصغر قاسم فعلي موجب ل n .

من خلال الخاصية (1) لدينا p أولي.

إذن p أولي و p/n

لنبين أن $p^2 \leq n$

لدينا: p/n يعني $n = kp$

لنبين أن k قاسم فعلي ل n

لدينا $k \neq 0$

- نفترض أن $k=1$ إذن $n=p$ وهذا تناقض لأن:

n غير أولي و p أولي.

إذن $k \neq 1$

- نفترض أن $k=n$ إذن $p=1$ وهذا تناقض لأن p أولي.

إذن $k \neq n$

- ولدينا $k > 0$ إذن $k \neq -1$

إذن k قاسم فعلي موجب ل n .

- وبما أن p هو أصغر قاسم فعلي موجب ل n .

فإن: $p \leq k$

يعني: $p^2 \leq kp$

يعني $p^2 \leq n$

- إذن يوجد p أولي بحيث: $\left\{ \begin{array}{l} p/n \\ p^2 \leq n \end{array} \right.$

ملاحظة:

1- ليكن $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

إذا أردنا أن نتحقق هل n أولي، نتبع ما يلي:

+ نعتبر الأعداد الأولية p التي تحقق $p^2 \leq n$

- إذا كان أحد هذه الأعداد يقسم n فإن n غير أولي لأنه يقبل قاسما فعليا.

- إذا كانت جميع هذه الأعداد لا تقسم n فإن n أولي.

مثال:

- لنحدد جميع الأعداد الأولية أصغر من 100.

بالنسبة للأعداد الأصغر من 100، الأعداد الأولية p التي يمكن

أن تحقق $p^2 \leq n$ هي 2, 3, 5, 7.

إذن الأعداد الأولية الأصغر من 100 هي الأعداد التي لا تقبل

القسمة على 2, 3, 5, 7 إضافة إلى الأعداد 2, 3, 5, 7.

- إذن هذه الأعداد هي:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43,

53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

2- ليكن $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

لكي نتحقق هل n أولي يمكن اتباع الخوارزمية التالية.

نقوم بقسمة n على الأعداد الأولية p انطلاقا من 2 على التوالي،

ونقف عند إحدى الحالات:

- إذا أصبح الخارج q أصغر من p قطعاً، والباقي غير منعدم

فيكون في هذه الحالة العدد n أولي.

- إذا حصلنا على باقي منعدم. فيكون n غير أولي.

برهان:

(* إذا حصلنا على باقي منعدم فإن n يقبل قاسما فعليا.

إذن n غير أولي.

(* نفتر أن حصلنا على $q < p$ قبل $r = 0$

لدينا $n = qp + r$ $0 \leq r < p$

لدينا: $q < p \Rightarrow q + 1 \leq p$

$\Rightarrow pq + p \leq p^2$

ولدينا $r < p$

إذن $pq + r < p + pq \leq p^2$

إذن $pq + r \leq p^2$ يعني $n \leq p^2$

إذن أجرينا قسمة n على p ولم نحصل على باقي منعدم حتى

أصبح $p^2 \geq n$ هذا يعني أن n لا يقبل على أي عدد أولي p

يقبل $p^2 \leq n$. إذن n أولي.

مثال:

لنتحقق هل 179 أولي:

p	2	3	5	7	11	13	17
q	89	59	35	25	16	13	10
r	1	2	4	4	3	10	9

إذن 179 أولي.

(4) الأعداد الأولية وقابلية القسمة:

خاصية (1):

ليكن $a \in \mathbb{Z}^*$ و p أولي.

$p \wedge a = 1 \Leftrightarrow p \times a$

برهان:

(\Rightarrow) نفترض أن $p \wedge a = 1$ ولنبين أن $p \times a$

- نفترض p/a

إذن $p \wedge a = |p|$ إذن $|p| = 1$

يعني $p = 1$ أو $p = -1$

وهذا تناقض لأن p أولي.

إذن $p \times a$

(\Leftarrow) نفترض أن $p \times a = 1$ لنبين أن $p \wedge a = 1$

نضع $d = p \wedge a$

إذن $\begin{cases} d/p \\ d/a \end{cases}$ ونعلم أن قواسم p هي: $-1, 1, -p, p$

ولدينا $\begin{cases} p \times a \\ -p \times a \end{cases}$ إذن $d \neq -p$ و $d \neq p$

ولدينا $d \neq -1$ لأن $d > 0$

إذن $d = 1$ ومنه $p \wedge a = 1$

خاصية (2):

ليكن p و q أوليين:

$p \wedge q = 1 \Leftrightarrow |p| \neq |q|$

برهان:

$p \wedge q = 1 \Leftrightarrow p \times q$

$\Leftrightarrow p \notin \{1, -1, q, -q\}$

$\Leftrightarrow p \notin \{q, -q\}$

$\Leftrightarrow p \neq q$ و $p \neq -q$

$\Leftrightarrow |p| \neq |q|$

خاصية (3):

ليكن a_1, a_2, \dots, a_n من \mathbb{Z} و p أولي.

$p/a_1 a_2 \dots a_n \Rightarrow (\exists i \in \{1, 2, \dots, n\}) p/a_i$

برهان:

نفترض أن $p/a_1 a_2 \dots a_n$. لنبين أن: p/a_i $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\}$

* إذا كان أحد الأعداد a_i منعدم.

مثلا $a_{i_0} = 0$ فإن p/a_{i_0}

* إذا كانت جميع الأعداد a_i تخالف 0.

نفترض أن: $p \times a_i$ ($\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$)

يعني $p \wedge a_i = 1$

إذن $P \wedge \prod_{i=1}^n a_i = 1$ يعني $p \times \prod_{i=1}^n a_i$

وهذا تناقض.

إذن p/a_i ($\exists i \in \{1, 2, \dots, n\}$).

ملاحظة:

1- ليكن $a \in \mathbb{Z}$ و p أولي و $n \in \mathbb{N}$.

(* $p/a^n \Rightarrow p/a$)

(* $p/ab \Rightarrow p/a$ أو p/b)

2- ليكن p أولي موجب.

(* $(\forall 1 \leq k < p) : p \wedge k = 1$)

(* $(\forall k \in \mathbb{Z} / 1 \leq |k| < p) : p \wedge k = 1$)

خاصية (4):

ليكن p_1, p_2, \dots, p_n أعداد أولية.

$p/p_1 p_2 \dots p_n \Rightarrow (\exists i \in \{1, 2, \dots, n\}) |p| = |p_i|$

برهان:

لدينا:

$$p/p_1 p_2 \dots p_n$$

إذن يوجد i بحيث

$$p/p_i$$

ونعلم أن قواسم p_i هي: $-1, 1, -p_i, p_i$

ولدينا $p \neq 1$ و $p_i \neq 1$ إذن $p_i = p$ أو $-p_i = p$

$$|p| = |p_i| \text{ يعني}$$

ملاحظة:

$$p/p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} \Rightarrow (\exists i \in \{1, 2, \dots, n\}) |p| = |p_i| \quad (*)$$

(*) إذا كانت الأعداد p_i موجبة

$$p/p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} \Rightarrow (\exists i \in \{1, 2, \dots, n\}) p = p_i \quad \text{فإن:}$$

تطبيق:

ليكن p عدد أولي موجب.

(1) بين أن p/C_p^k لكل $1 \leq k \leq p-1$

$$(2) \text{ بين أن } (\forall a \in \mathbb{N}) (a+1)^p \equiv a^p + 1[p]$$

(3) (a) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) n^p \equiv n[p]$

(b) استنتج أن: $n^p \equiv 1[p]$ لكل n من \mathbb{N} بحيث $n \wedge p = 1$

$$(4) \text{ (a) بين أن } (\forall a \in \mathbb{Z}) a^p \equiv a[p]$$

(b) بين أن $a^p \equiv 1[p]$ لكل a من \mathbb{Z} بحيث $a \wedge p = 1$

(1) لنبين أن p/C_p^k لكل $1 \leq k \leq p-1$

ليكن $1 \leq k \leq p-1$. لنبين أن p/C_p^k

لدينا:

$$C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{1.2 \dots (p-k)(p-k+1) \dots p}{k!(1.2 \dots (p-k))}$$

$$= \frac{(p-k+1) \dots p}{k!}$$

$$\text{إذن } k! C_p^k = (p-k+1) \dots p$$

$$\text{إذن } p/k! C_p^k$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \quad 1 \leq i < p$$

ولدينا:

$$\text{إذن } p \times i$$

$$\text{إذن } p \wedge i = 1$$

إذن $p \wedge k! = 1$ بحسب Gauss:

$$\text{لدينا } p/C_p^k \quad (\forall 1 \leq k \leq p-1)$$

(2) ليكن $a \in \mathbb{N}$. لنبين أن: $(a+1)^p \equiv a^p + 1[p]$

لدينا:

$$(a+1)^p - (a^p + 1) = \sum_{k=0}^p a^k \cdot 1^{p-k} - (a^p + 1)$$

$$= \sum_{k=0}^p C_p^k a^k - (a^p + 1)$$

$$= 1 + a^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k a^k - (a^p + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k a^k$$

ولدينا p/C_p^k $1 \leq k \leq p-1$

$$\text{إذن } p/C_p^k a^k$$

$$\text{إذن } p/\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k a^k$$

$$\text{يعني: } p/(a+1)^p - (a^p + 1)$$

بالتالي: $(a+1)^p \equiv a^p + 1[p]$

(3) (a) ليكن $n \in \mathbb{N}$ لنبين أن $n^p \equiv n[p]$

نعلم أن:

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ $(\forall a \in \mathbb{N}) (a+1)^p \equiv a^p + 1[p]$

$$1^p \equiv 1[p] \quad \text{إذن}$$

$$2^p \equiv 1^p + 1[p]$$

$$3^p \equiv 2^p + 1[p]$$

$$n^p \equiv (n-1)^p + 1[p]$$

بجمع أطراف المتساويات طرف طرف نستنتج أن:

$$n^p \equiv \underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ مرة}}[p]$$

مرة n

$$n^p \equiv n[p] \quad \text{يعني:}$$

ونلاحظ أن الخاصية تبقى صحيحة من أجل $n=0$

إذن: $(\forall n \in \mathbb{N}) n^p \equiv n[p]$

(b) ليكن $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n \wedge p = 1$. لنبين أن: $n^{p-1} \equiv 1[p]$

لدينا مما سبق: $n^p \equiv n[p]$

$$\text{يعني } p/n^p - n$$

$$\text{يعني } p/n(n^{p-1} - 1)$$

وبما أن $n \wedge p = 1$

$$\text{فإن } p/n^{p-1} - 1$$

يعني $[p] \equiv 1$ لكل n بحيث $n \wedge p = 1$

(4) (a) ليكن $a \in \mathbb{Z}$. لنبين أن $a^p \equiv a[p]$

← إذا كان $a \geq 0$

فإنه من خلال ما سبق: $a^p \equiv a[p]$

← إذا كان $a \leq -1$

$$\text{فإن } -a \geq 1 \quad \text{إذن } (-a)^p \equiv -a[p]$$

- إذا كان $p \neq 2$ فإن p فردي.

$$\text{إذن: } (-a)^p = -a^p$$

$$\text{إذن } -a^p \equiv -a[p]$$

$$\text{إذن } a^p \equiv a[p]$$

- إذا كان $p = 2$ فإن: $(-a)^2 \equiv -a[2]$

$$a^2 \equiv -a[2] \quad \text{يعني:}$$

$$\text{ولدينا } -a \equiv a[2]$$

$$\text{إذن } a^2 \equiv a[2]$$

إذن:

$$(\forall a \in \mathbb{Z}) \quad a^p \equiv a[p]$$

(b) ليكن $a \in \mathbb{Z}$ بحيث $a \wedge p = 1$. لنبين أن $a^{p-1} \equiv 1[p]$

$$\text{لدينا: } a^p \equiv a[p]$$

$$\text{يعني } p/a^p - a$$

$$\text{أي } p/a^{p-1} - 1$$

وبما أن $a \wedge p = 1$ فإن $p/a^{p-1} - 1$

$$\text{إذن } a^{p-1} \equiv 1[p]$$

ميرھنة Fermat

ليكن p أولي موجب.

$$\forall a \in \mathbb{Z} \quad a^p \equiv a [p] \quad (*)$$

$$a \wedge p = 1 / \mathbb{Z} \quad \text{لكل } a \quad a^{p-1} \equiv 1 [p] \quad (*)$$

(5) تفكيك عدد إلى عداد عوامل أولية:

(a) ميرھنة:

كل عدد a من $\mathbb{Z}^* - \{-1, 1\}$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل

$$a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

حيث:

(*) الأعداد p_i أولية موجبة ومختلفة مثلى مثلى.

(*) الأعداد α_i طبيعية غير منعدمة.

(*) $\varepsilon = 1$ إذا كان $a > 0$

(*) $\varepsilon = -1$ إذا كان $a < 0$

(b) تطبيقات:

← قابلية القسمة:

خاصية:

ليكن b من $\mathbb{N}^* - \{1\}$

ليكن: $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ تفكيك a إلى جداد عوامل أولية.

b/a إذا فقط إذا كان b يكتب على شكل:

$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$$

حيث: $\beta_i \in \{0, 1, 2, \dots, \alpha_i\} = E_i$

كل ترتيبية $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$ من $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_r$ تعطينا قاسم

موجب ل a هو: $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$

إذن عدد القواسم الموجبة ل a هو عدد الترتيبات $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$

ونعلم أن عدد هذه الترتيبات هو: $\text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_r)$

$$= (\text{card} E_1)(\text{card} E_2) \times \dots (\text{card} E_r)$$

$$= (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_r)$$

خاصية:

ليكن a من $\mathbb{N}^* - \{1\}$ و $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ تفكيك a إلى جداد

عوامل أولية.

$$\alpha = \prod_{i=1}^r (1 + \alpha_i) \quad \text{هو: عدد القواسم الموجبة ل } a$$

مثال:

لنحدد القواسم الموجبة للعدد 54:

لنفكك 54:

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{إذن } 54 = 2 \times 3^3$$

← عدد القواسم الموجبة ل 54 هو:

$$\alpha = (1+1)(1+3) = 8$$

وهذه القواسم هي الأعداد التي نكتب على شكل:

$$\beta_1 \in \{0, 1\} \quad \text{حيث } d = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2}$$

$$\beta_2 \in \{0, 1, 2, 3\} \quad \text{و}$$

إذن هذه القواسم هي:

$$2^0 \cdot 3^0 = 1 \quad ; \quad 2^0 \cdot 3^1 = 3 \quad ; \quad 2^0 \cdot 3^2 = 9$$

$$2^0 \cdot 3^3 = 27 \quad ; \quad 2^1 \cdot 3^0 = 2 \quad ; \quad 2^1 \cdot 3^1 = 6$$

$$2^1 \cdot 3^2 = 18 \quad ; \quad 2^1 \cdot 3^3 = 54.$$

← القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر:

ليكن p_1, p_2, \dots, p_r الأعداد الأولية التي تظهر في تفكيك b و a

نضع: $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ حيث $0 \leq \alpha_i$

و $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$ و $0 \leq \beta_i$

حيث $0 = \alpha_i$ إذا كان p_i لا يظهر في تفكيك a .

و $0 = \beta_i$ إذا كان p_i لا يظهر في تفكيك b .

نضع $d = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \dots p_r^{\gamma_r}$ حيث: $\gamma_i = \inf(\alpha_i, \beta_i)$

لنبين أن $d = a \wedge b$

* لدينا: $\forall i \in \{1, 2, \dots, r\} \quad \gamma_i \leq \alpha_i$

و $\gamma_i \leq \beta_i$

إذن $\left\{ \begin{array}{l} d/a \\ d/b \end{array} \right.$ إذن لا قاسم مشترك ل b و a

* ليكن d' قاسم مشترك ل b و a . لنبين أن $d' \leq d$

لدينا: $\left\{ \begin{array}{l} d'/a \\ d'/b \end{array} \right.$ إذن d' يكتب على شكل: $d' = p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \dots p_r^{\lambda_r}$

حيث $0 \leq \lambda_i \leq \alpha_i$

$0 \leq \lambda_i \leq \beta_i$

إذن $0 \leq \lambda_i \leq \inf(\alpha_i, \beta_i)$

إذن $0 \leq \lambda_i \leq \gamma_i$

إذن d'/d

إذن $d = a \wedge b$

← بنفس الطريقة نجد المضاعف المشترك الأصغر.

خاصية:

ليكن a و b من $\mathbb{N}^* - \{1\}$

نضع $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$

و $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$

حيث p_i هي الأعداد الأولية التي تظهر في تفكيك a أو b

$\alpha_i = 0$ إذا كان p_i لا يظهر في تفكيك a

$\beta_i = 0$ إذا كان p_i لا يظهر في تفكيك b

لدينا: $a \wedge b = \prod_{i=1}^r p_i^{\inf(\alpha_i, \beta_i)}$

و $a \vee b = \prod_{i=1}^r p_i^{\sup(\alpha_i, \beta_i)}$

ملاحظة:

(*) القاسم المشترك الأكبر ل b و a هو جداء العوامل الأولية

المشتركة مرفوعة إلى أصغر أس.

(*) $a \vee b$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة

مرفوعة إلى أكبر أس.

مثال:

لنحدد: $76 \vee 632$ و $76 \wedge 632$

$$\begin{array}{r|l} 76 & 2 \\ 38 & 2 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 632 & 2 \\ 316 & 2 \\ 158 & 2 \\ 79 & 79 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{إذن } 76 = 2^2 \cdot 19$$

$$\text{إذن } 632 = 2^3 \cdot 79$$

$$76 \wedge 632 = 2^2 = 4$$

لدينا:

$$76 \vee 632 = 2^3 \cdot 19 \cdot 79 = 12008$$

(VII) نظمات العدد:

1- أمثلة:

مثال 1: نعتبر العدد $n = 526$

$$n = 526 = 500 + 20 + 6$$

$$= 510^2 + 210^1 + 6$$

(* لدينا:

إن العدد n يكتب باستعمال العشرة أرقام 0, 1, 2, ..., 9 وقوى 10.

نقول إن الكتابة $n = 256$ تمثيل عشري للعدد n أو تمثيل n في نظمة العد العشري، أو تمثيل العدد n في نظمة العد ذات الأساس 10.

(* ويمكن كتابة n باستعمال 3 أرقام فقط 0, 1, 2 وقوى 3:

$$n = 526 = 486 + 40$$

$$= 2 \cdot 3^5 + 27 + 13$$

$$= 2 \cdot 3^5 + 3^3 + 9 + 4$$

$$= 2 \cdot 3^5 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1$$

$$\text{إن } n = 2 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 1$$

$$n = \overline{201111}_{(3)} \quad \text{ونكتب:}$$

وهذه الكتابة تسمى تمثيل n في نظمة العد ذات الأساس 3.

مثال 2: نعتبر العدد $n = 200$

- لنكتب تمثيل n في نظمة العد ذات الأساس 3.

$$n = 200 = 162 + 38$$

$$= 2 \cdot 3^4 + 27 + 11$$

$$= 2 \cdot 3^4 + 3^3 + 3^2 + 2$$

$$= 2 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 2$$

$$n = \overline{21102}_{(3)} \quad \text{إن:}$$

2- تعميل عدد طبيعي في نظمة العد ذات الأساس b

ميرهنة:

ليكن $b \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

كل عدد n من \mathbb{N}^* يكتب بطريقة وحيدة على شكل:

$$n = \alpha_p b^p + \alpha_{p-1} b^{p-1} + \alpha_{p-2} b^{p-2} + \dots + \alpha_1 b^1 + \alpha_0$$

حيث:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i \in \mathbb{N} \\ 0 \leq \alpha_i < b \end{array} \right. \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, p\} \text{ و } \alpha_p \neq 0$$

$$\text{و } b^p \leq n < b^{p+1}$$

$$n = \overline{\alpha_p \alpha_{p-1} \dots \alpha_1 \alpha_0}_{(b)} \quad \text{ونكتب:}$$

وتسمى هذه الكتابة تمثيل العدد n في نظمة العد ذات الأساس 5.

ملاحظة:

هناك عدة نظمات العد أهمها:

- نظمة العد العشري وهي النظمة المتداولة.

- نظمة العد الثنائي والأرقام المستعملة هي 0, 1.

- نظمة العد ذات الأساس 8. والأرقام المستعملة هي: 0, 1, ..., 7.

- نظمة العد ذات الأساس 12. والأرقام المستعملة 0, 1, ..., 9, β, α .

3- طريقة عملية لتمثيل عدد n في نظمة عد أساسها b .

ليكن $b \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ و $n \in \mathbb{N}^*$

(+ نقسم n على b : $n = b \cdot q_0 + r_0$ مع $0 \leq r_0 < b$

(* إذا كان $q_0 \neq 0$: نقسم q_0 على b :

$$0 \leq r_1 < b \quad q_0 = b q_1 + r_1$$

(* إذا كان $q_1 \neq 0$: نقسم q_1 على b :

$$0 \leq r_2 < b \quad q_1 = b q_2 + r_2$$

وهكذا نتابع القسمة حتى نحصل على خارج منعدم.

ومن الضروري أن نحصل على خارج منعدم، لأن:

$$1 < b \Rightarrow q_0 < q_0 b < q_0 b + r_0 = n \quad \text{- لدينا:}$$

$$q_0 < n$$

$$1 < b \Rightarrow q_1 < q_1 b < q_1 b + r_1 = q_0 \quad \text{-}$$

$$q_1 < q_0$$

$$\text{إن } 0 < \dots < q_2 < q_1 < q_0 < n$$

هذه الخوارج تناقصية قطعاً. وبالتالي ضروري أن نحصل على خارج منعدم.

- نفترض أن q_p هو أول خارج منعدم.

$$\forall i \in \{0, \dots, (p-1)\} \quad q_i \neq 0 \quad \text{يعني:}$$

$$0 \leq r_0 < b \quad n = q_0 b + r_0 \quad (b^0)$$

$$0 \leq r_1 < b \quad q_0 = q_1 b + r_1 \quad (b^1)$$

$$0 \leq r_2 < b \quad q_1 = q_2 b + r_2 \quad (b^2)$$

$$q_{p-1} = b \cdot q_p + r_p \quad (b^p)$$

بضرب الأسطر في $b^0, b^1, b^2, \dots, b^p$ على التوالي نحصل على وجمع أطراف المتساويات نحصل على:

$$n = r_0 + r_1 b^1 + r_2 b^2 + \dots + r_p b^p + \underbrace{q_p b^{p+1}}_{=0} \quad (q_p = 0)$$

$$n = r_p b^p + r_{p-1} b^{p-1} + \dots + r_1 b + r_0 \quad \text{إن:}$$

$$0 \leq r_i < b \quad \text{حيث}$$

$$r_p = q_{p-i} \neq 0 \quad \text{و}$$

$$n = r_p r_{p-1} \dots r_0_{(b)} \quad \text{إن}$$

خاصية:

ليكن $b \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ و $n \in \mathbb{N}^*$

نقوم بالقسمة المتتالية للخوارج على b بدءاً من n .

وإذا كانت r_0, r_1, \dots, r_p هي بواقي هذه القسمة حيث r_p هو باقي أول قسمة نحصل فيها على خارج منعدم

$$n = r_p r_{p-1} \dots r_0_{(b)} \quad \text{فإن:}$$

ونلخص هذه القسمة في الجدول التالي:

$$\begin{array}{r} n \mid b \\ \quad q_0 \mid b \\ \quad \quad q_1 \mid b \\ \quad \quad \quad q_2 \mid b \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad b \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 = q_p \end{array}$$

مثال:

$$n = 798 \quad \text{نعتبر العدد}$$

لنمثل n في نظمة العد ذات الأساس 7.

$$\begin{array}{r} 798 \mid 7 \\ \quad 114 \mid 7 \\ \quad \quad 16 \mid 7 \\ \quad \quad \quad 2 \mid 7 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

إذن: $799 = \overline{2220}_{(7)}$

(4) تغيير الأساسية:

(* إذا أردنا المرور من التمثيل العشري إلى نظمة عد أساسها b نتبع الخوارزمية السابقة.

(* إذا أردنا المرور من التمثيل في نظمة عد أساسها b إلى نظمة

العد العشري، نستعمل: $n = \overline{d_p d_{p-1} \dots d_0}_{(b)}$

$$= \alpha_p b^p + \alpha_{p-1} b^{p-1} + \dots + \alpha_1 b + \alpha_0$$

مثال:

$$n = \overline{3450}_{(6)} = 3 \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 + 0 = 822$$

(* إذا أردنا المرور من التمثيل في نظمة عد أساسها b إلى نظمة عد أساسها b' ، نمر من b إلى التمثيل العشري ومن التمثيل العشري إلى b' .

(5) مقارنة عددين:

خاصية:

نعتبر العددين: $x = \overline{\alpha_p \alpha_{p-1} \dots \alpha_0}_{(b)}$

$$y = \overline{\beta_q \beta_{q-1} \dots \beta_0}_{(b)}$$

إذا كان $p > q$ يعني عدد أرقام x أكبر قطعاً من عدد أرقام y . فإن $x > y$.

خاصية 2:

نعتبر العددين:

$$x = \overline{\alpha_p \dots \alpha_0}_{(b)}$$

$$y = \overline{\beta_p \dots \beta_0}_{(b)}$$

(x و y لهما نفس عدد الأرقام)

نفترض أن $\alpha_i \neq \beta_i, \dots, \alpha_{p-1} = \beta_{p-1}, \alpha_p = \beta_p$

- إذا كان $\alpha_i > \beta_i$ فإن $x > y$

- إذا كان $\alpha_i < \beta_i$ فإن $x < y$

(6) الجمع والضرب في نظمة عد أساسها b .

عمليتا الجمع والضرب في نظمة عد أساسها b تتم بنفس الطريقة في نظمة العد العشري.

هناك فرق فقط في الاحتفاظ، حيث عند حساب $\alpha_i \beta_i$ أو $\alpha_i + \beta_i$ إذا حصلنا على رقم $\gamma < b$ نكتب γ . وإذا حصلنا على $\gamma \geq b$ نقوم

بقسمة γ على $b = bq + r$ مع $0 \leq r < b$

نكتب r ونحتفظ ب q .

مثال:

$$3675_{(8)} + 2764_{(8)} = 6661_{(8)} \quad (*)$$

$$\overline{5624}_{(7)} \times \overline{56}_{(7)} = \overline{50313}_{(7)} + \overline{41356}_{(7)} = \overline{464203}_{(7)} \quad (*)$$

(7 مضاعف القسمة على 2, 3, 4, 5, 9, 11, 25.

نعتبر العدد $x = \overline{\alpha_p \alpha_{p-1} \dots \alpha_0}_{(10)}$

$$x = \alpha_p 10^p + \alpha_{p-1} 10^{p-1} + \dots + \alpha_1 10 + \alpha_0$$

لدينا:

$$2/x \Leftrightarrow 2/\alpha_0$$

لدينا: $10 \equiv 0[2]$ إذن $\forall i \in \{1, \dots, p\} 10^i \equiv 0[2]$

$$\alpha_i 10^i \equiv 0[2] \quad \text{يعني}$$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i 10^i \equiv 0[2]$$

إذن:

$$\sum_{i=1}^p -\alpha_i 10^i + \alpha_0 \equiv \alpha_0 [2] \quad \text{يعني:}$$

$$x \equiv \alpha_0 [2] \quad \text{يعني:}$$

إذن:

$$2/x \Leftrightarrow x \equiv 0[2]$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 \equiv 0[2] \quad (x \equiv \alpha_0 [2])$$

$$\Leftrightarrow 2/\alpha_0$$

$$2/x \Leftrightarrow 2/\alpha_0 \quad \text{وبالتالي:}$$

(* لنبين أن:

$$3/x \Leftrightarrow 3/\sum_{i=0}^p \alpha_i$$

لدينا $10 \equiv 1[3]$

إذن $\forall i \in \{1, 2, \dots, p\} 10^i \equiv 1[3]$

$$\alpha_i 10^i \equiv \alpha_i [3] \quad \text{يعني}$$

إذن:

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i 10^i \equiv \sum_{i=1}^p \alpha_i [3]$$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i 10^i + \alpha_0 \equiv \sum_{i=1}^p \alpha_i [3] \quad \text{إذن:}$$

$$x \equiv \sum_{i=0}^p \alpha_i [3] \quad \text{أي:}$$

إذن:

$$3/x \Leftrightarrow x \equiv 0[3]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^p \alpha_i \equiv 0[3] \quad \left(x \equiv \sum_{i=0}^p \alpha_i [3] \right)$$

$$\Leftrightarrow 3/\sum_{i=0}^p \alpha_i$$

$$3/x \Leftrightarrow 3/\sum_{i=0}^p \alpha_i \quad \text{وبالتالي:}$$

- لنبين أن: $4/x \Leftrightarrow 4/\overline{\alpha_1 \alpha_0}$

لدينا: $\forall i \in \{2, \dots, p\} : 10^i = 10^2 \cdot 10^{i-2}$

$$= 100 \cdot 10^{i-2}$$

$$= 4 \cdot 25 \cdot 10^{i-2}$$

إذن $\forall i \in \{2, \dots, p\} 10^2 \equiv 0[4]$

$$\alpha_i 10^i \equiv 0[4] \quad \text{إذن}$$

$$\sum_{i=2}^p \alpha_i \cdot 10^i \equiv 0[4] \quad \text{إذن:}$$

$$\sum_{i=2}^p \alpha_i 10^2 + \alpha_1 10 + \alpha_0 \equiv \alpha_1 10 + \alpha_0 [4]$$

$$x \equiv \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0 [4] \quad \text{يعني:}$$

$$x \equiv \overline{\alpha_1 \alpha_0} [4] \quad \text{يعني}$$

$$4/x \Leftrightarrow x \equiv 0[4] \quad \text{إذن:}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\alpha_1 \alpha_0} \equiv 0[4] \quad (x \equiv \overline{\alpha_1 \alpha_0} [4])$$

$$\Leftrightarrow 4/\overline{\alpha_1 \alpha_0}$$

$$4/x \Leftrightarrow 4/\overline{\alpha_1 \alpha_0} \quad \text{وبالتالي:}$$

وبالتعويض في (1) نحصل على:

$$5(265a + 2c) = 271.5$$

$$265a + 2c = 271 \quad \text{يعني}$$

$$(*) \quad 2c = 271 - 265a \quad \text{يعني}$$

ولدينا $2c > 0$ إذن $271 - 265a > 0$

$$0 < a < \frac{271}{265} = 1 \quad \text{يعني:}$$

إذن: $a = 1$

وبالتعويض في (*) نجد: $c = 3$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 3 \end{cases} \quad \text{بالتالي:}$$

- لنبين أن: $11/x \Leftrightarrow \alpha_0 + \alpha_1 + \dots \equiv \alpha_1 + \alpha_3 + \dots [11]$

لدينا: $\forall i \in \{1, \dots, p\} \quad 10 \equiv -1 [11]$

إذن $10^i \equiv (-1)^i [11]$

إذن $\alpha_i 10^i \equiv \alpha_i (-1)^i [11]$

إذن: $\sum_{i=1}^p \alpha_i 10^i \equiv \sum_{i=1}^p \alpha_i (-1)^i [11]$

أي: $\sum_{i=1}^p \alpha_i 10^i + \alpha_0 \equiv \sum_{i=1}^p \alpha_i (-1)^i + \alpha_0 [11]$

يعني: $x \equiv \sum_{i=1}^p \alpha_i (-1)^i [11]$

يعني: $x \equiv \sum_{i=0}^p \alpha_i (-1)^i + \sum_{i=0}^p \alpha_i (-1)^i [11]$

إذن: $x \equiv \sum_{i=0}^p \alpha_i - \sum_{i=0}^p \alpha_i [11]$

إذن: $11/x \Leftrightarrow x \equiv 0 [11]$

$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^p \alpha_i - \sum_{i=0}^p \alpha_i \equiv 0 [11]$

$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^p \alpha_i \equiv \sum_{i=0}^p \alpha_i [11]$

بالتالي: $11/x \Leftrightarrow \alpha_0 + \alpha_2 + \dots = \alpha_1 + \alpha_3 + \dots [11]$

خاصية:

نعتبر العدد $x = \overline{\alpha_p \alpha_{p-1} \dots \alpha_0}_{(10)}$

لدينا:

*) $2/x \Leftrightarrow \overline{2\alpha_0}_{(10)}$

*) $3/x \Leftrightarrow 3 \overline{\sum_{i=0}^p \alpha_i}$

*) $4/x \Leftrightarrow 4 \overline{\alpha_1 \alpha_0}$

*) $5/x \Leftrightarrow \alpha_0 \in \{0, 5\}$

*) $9/x \Leftrightarrow 9 \overline{\sum_{i=0}^p \alpha_i}$

*) $11/x \Leftrightarrow \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_4 + \dots \equiv \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots [11]$

*) $25/x \Leftrightarrow \overline{\alpha_1 \alpha_0} \in \{\overline{00}, \overline{25}, \overline{50}, \overline{75}\}$

تمرين تطبيقي:

حدد الأعداد الطبيعية غير المنعدمة c, b, a بحيث:

$$\overline{bbac}_{(7)} = \overline{abca}_{(11)}$$

نلاحظ أن c, b, a أصغر قطعا من 11 و 7.

وبالتالي فهي محصورة قطعا بين 0 و 7.

وبالتالي فهي محصورة بين 1 و 6.

لدينا:

$$\overline{bbac}_{(7)} = \overline{abca}_{(11)} \Leftrightarrow b7^3 + b7^2 + a7 + c = a11^3 + b11^2 + c11 + a$$

$$\Leftrightarrow 343b + 49b + 7a + c = 1331a + 121b + 11c + a$$

$$\Leftrightarrow 1325a - 271b + 10c = 0$$

$$\Leftrightarrow 1325a + 10c = 271b$$

$$\Leftrightarrow 5(265a + 2c) = 271b \quad (1)$$

إذن $5/271b$

ولدينا: $271 \wedge 5 = 1$ إذن حسب Gauss نستنتج أن $5/b$

وبما أن $1 \leq b \leq 6$ فإن $b = 5$